

ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ! Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΛΕΙΞΗ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ

ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

**Παπαστάθη Χρύσα¹, Κανέλλος Ιωάννης^{2,3}, Παπαδάκη Εύη³,
Μπιζά Ειρήνη³, Ναρδή Έλενα³**

¹Πειραματικό Γυμνάσιο Ρεθύμνου, ²ΠΕ.ΚΕ.Σ. Κρήτης,

³University of East Anglia (UEA, UK)

xrysapapastathi@gmail.com, I.Kanellos@uea.ac.uk,
P.Papadaki@uea.ac.uk, I.Biza@uea.ac.uk, e.nardi@uea.ac.uk

Στο πλαίσιο έρευνα δράσης με στόχο τη σύνδεση έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών με την πραγματικότητα της τάξης, η ερευνητική ομάδα του *MathTASK*, ένας Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου (Σ.Ε.Ε.) και μία εκπαιδευτικός συνεργάστηκαν στο σχεδιασμό, εφαρμογή και αξιολόγηση καινοτόμων δραστηριοτήτων με θέμα τη μαθηματική απόδειξη στην τάξη της εκπαιδευτικού. Η συνεργασία απέδωσε σειρά δραστηριοτήτων που δοκιμάστηκαν στην τάξη και οι οποίες διενκολύνουν την πρώτη επαφή των μαθητ(ρι)ών με τη μαθηματική απόδειξη, εγείρουν το ενδιαφέρον και την εκτίμησή τους για αυτήν αλλά και αναπτύσσουν δεξιότητες τεκμηρίωσης, ομαδικής εργασίας και διαπραγμάτευσης εναλλακτικών λύσεων προβλήματος.

ΕΡΕΥΝΑ ΔΡΑΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Έρευνα δράσης είναι η «μελέτη μιας κοινωνικής κατάστασης με σκοπό τη βελτίωση της ποιότητας της δράσης μέσα σε αυτήν» (Elliott, 1991, σελ. 69). Χαρακτηριστικά της στην εκπαίδευση είναι μεταξύ άλλων ο συνεργατικός και συμμετοχικός χαρακτήρας, η σύνδεση θεωρίας και πράξης, ο στοχασμός και αναστοχασμός, η ανοιχτή σπειροειδής διαδικασία, και η σύνδεση με την επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού. Κεντρική ιδέα είναι ότι όλοι οι εμπλεκόμενοι με την εκπαιδευτική πρακτική συμμετέχουν στην παραγωγή νέας γνώσης και δεν είναι απλώς χρήστες γνώσης που παράγουν ερευνητές αποστασιοποιημένοι από την εκπαιδευτική πράξη. Η μορφή συνεργασίας μεταξύ των εκπαιδευτικών και των ερευνητών αναφέρεται ως μια «συνεργατική συμφωνία μάθησης» (Wagner, 1997, σελ. 15-16) στην οποία ο καθένας μπορεί να μάθει περισσότερα για τον κόσμο του άλλου αλλά και για τον δικό του. Στο πλαίσιο τις διδασκαλίας των Μαθηματικών, η βιβλιογραφία παραθέτει επιτυχημένα παραδείγματα τέτοιας συνεργασίας (π.χ. Potari et al., 2010). Σε αυτή την εργασία παρουσιάζουμε την συνεργασία μίας ερευνητικής ομάδας, ενός Συντονιστή Εκπαιδευτικού Έργου (Σ.Ε.Ε.) και μίας εκπαιδευτικού. Στόχος της συνεργασίας ήταν η εφαρμογή στην τάξη καινοτόμων δραστηριοτήτων με θέμα τη μαθηματική απόδειξη.

Το ερευνητικό ερώτημα που διαπραγματεύομαστε είναι ποια είναι τα χαρακτηριστικά που καθιστούν αυτήν τη συνεργασία επιτυχημένη (άμεσα αποτελεσματική και μεσο/μακροπρόθεσμα βιώσιμη). Παραθέτουμε ακολούθως στοιχεία που αφορούν στο πλαίσιο συνεργασίας και στο σχεδιασμό, εφαρμογή και αξιολόγηση των δραστηριοτήτων στην τάξη.

ΑΦΟΡΜΗΣΗ: ΟΜΑΔΑ, ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ

Η ομάδα σχηματίστηκε ως ανταπόκριση σε οργανικές ανάγκες της σχολικής μονάδας και της εκπαιδευτικού. Κατόπιν εισηγήσεων του Υπουργείου Παιδείας και του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π., Κύκλοι Δεξιοτήτων Μάθησης, Ζωής, Τεχνολογίας και Νου), το Σχολείο εισήγαγε πιλοτικά στο ωρολόγιο πρόγραμμα «Εργαστήρια Δεξιοτήτων». Ο Σ.Ε.Ε. Μαθηματικών εισηγήθηκε στο Διευθυντή και στο Σύλλογο Διδασκόντων μια καινοτόμα-πειραματική δράση στα πλαίσια αυτών των εργαστηρίων με αντικείμενο τη διδασκαλία της απόδειξης στα Μαθηματικά της Γ' Γυμνασίου – και την υποστήριξη αυτής της δράσης από ερευνήτριες της Μαθηματικής εκπαίδευσης. Η πρόταση εγκρίθηκε από τα θεσμικά όργανα του Σχολείου και η ομάδα συστάθηκε αρχικά με διαφορετικά κίνητρα: (α) την εκπαιδευτικό η οποία θεώρησε την πρόταση συμβατή τόσο με τις εκπαιδευτικές αξίες του Σχολείου και τις συνθήκες εργασίας όσο και με τους στόχους του σχεδίου δράσης που είχε ήδη ετοιμάσει για τα «Εργαστήρια Δεξιοτήτων» με γενικό τίτλο «ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ: Συμφωνώ - Διαφωνώ - Επιχειρηματολογώ», (β) τις ερευνήτριες οι οποίες δραστηριοποιούνται επί μακρόν στο χώρο της επιμόρφωσης εκπαιδευτικών μέσω του προγράμματος MathTASK (Biza et al., 2007) και (γ) τον Σ.Ε.Ε. ο οποίος επιδίωκε τη στήριξη του Σχολείου αλλά και το ερευνητικό του ενδιαφέρον για την εισαγωγή των μαθητ(ρι)ών της Γ' Γυμνασίου στη μαθηματική απόδειξη (Kanellos et al., 2018).

Κύριος διδακτικός στόχος ήταν η εισαγωγή των μαθητ(ρι)ών στην αναγκαιότητα της απόδειξης ως εργαλείο για την τεκμηρίωση της αλήθειας στα μαθηματικά (Kanellos et al., 2018) αλλά και σε ένα ευρύτερο πλαίσιο της επιχειρηματολογίας στην καθημερινή ζωή (Askew, 2020). Οι επιμέρους στόχοι περιλαμβάνουν: 1) καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας 2) εξοικείωση των μαθητ(ρι)ών με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και με την αποδεικτική διαδικασία 3) ενίσχυση της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων 4) σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητ(ρι)ών να κατανοούν και να ελέγχουν κριτικά τα αποτελέσματα που παράγουν 5) καλλιέργεια κριτικής προσέγγισης της πληροφορίας και προβληματισμός για τη διαφορά ανάμεσα στην προσωπική άποψη και τα πραγματικά δεδομένα 6) ανάδειξη της διαφοράς ανάμεσα στο πείραμα – δοκιμή – εμπειρία και στη γενίκευση.

ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΗΣ ΟΜΑΔΑΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Η γεωγραφική απόσταση των μελών της ομάδας αλλά και η επιβεβλημένη κοινωνική αποστασιοποίηση λόγω της πανδημίας οδήγησαν αποκλειστικά σε δέκα διαδικτυακές συναντήσεις στην περίοδο Νοέμβριος 2020 – Μάϊος 2021. Ταυτόχρονα υπήρξε πλούσια συνομιλία και επεξεργασία δραστηριοτήτων μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου. Στην πρώτη συνάντηση, η ομάδα συζήτησε διεξοδικά τους προβληματισμούς πάνω στον τρόπο που οι μαθητές/ήτριες έχουν μάθει να μελετούν και συγκεκριμένα στο γεγονός ότι ακολουθούν κυρίως διαδικαστικές μεθόδους (Askew, 2020). Προσδιορίσαμε τους στόχους της συνεργασίας και τη μεθοδολογία με την οποία θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες και αρχίσαμε να επεξεργαζόμαστε το σενάριο της πρώτης δραστηριότητας.

Ακολούθησε εκπόνηση τεσσάρων δραστηριοτήτων, μία Δια Ζώσης (ΔZ) και τρεις με προσαρμογή σε Εξ Αποσάσεως Εκπαίδευση (ΕΞΑΕ): 1^η - Εισαγωγή στην έννοια και στην απόδειξη ταυτότητας *Πάρε θέση! Ο Δημήτρης, η Κατερίνα κι ο Πάνος συζητούν για την ... ισότητα* / 2^η - Αποδεικτική άσκηση στην ισότητα τριγώνων με χρήση μεσοκάθετου *Enterprise* / 3^η - Εφαρμογή της παραγοντοποίησης στην επίλυση τριτοβάθμιας εξίσωσης *Factorize* / 4^η - Εισαγωγή στις Ανισότητες *Συζήτηση για μια ανισότητα*. Οι δραστηριότητες διαμορφώθηκαν έτσι ώστε να εγείρουν ενεργητική εμπλοκή των μαθητ(ρι)ών και να εμπεριέχουν εργασία σε ομάδες, παρουσίαση και συζήτηση στην ολομέλεια του τμήματος αλλά και προσωπικό αναστοχασμό. Οι παρουσιάσεις των μαθητ(ρι)ών έγιναν είτε προφορικά (ΔZ μαθήματα), είτε καταγράφοντάς τις σε ένα εξωτερικό εργαλείο (π.χ. Webex, φόρμα Google, padlet, Edmodo, ΕΞΑΕ μαθήματα). Η επιλογή του εργαλείου έλαβε υπόψη το επίπεδο ψηφιακού γραμματισμού των μαθητ(ρι)ών καθώς και το ότι μεγάλο ποσοστό παρακολουθούσε από τάμπλετ ή κινητό κι όχι από σταθερό ή φορητό υπολογιστή. Σημειώνουμε επίσης πως αρκετοί/ές μαθητές/ήτριες είτε παρουσιάζουν μαθησιακές δυσκολίες είτε έχουν χαμηλή συμμετοχή σε αντίθεση με άλλους/ες που συμμετέχουν και εκφράζουν άνετα την άποψή τους. Η συμπερίληψη μαθητ(ρι)ών με διαφορετικό προφίλ στην ίδια ομάδα λήφθηκε υπόψη ώστε να έχουν τη δυνατότητα όλοι/ες να συνεισφέρουν.

Έπειτα από κάθε δραστηριότητα στην τάξη, γινόταν συνάντηση για την ενημέρωση της ομάδας ως προς την πορεία υλοποίησης, τον σχολιασμό, τις αντιδράσεις αλλά και τις ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες ιδέες των μαθητ(ρι)ών, τα πιθανά προβλήματα που προέκυψαν και τέλος την υποστήριξη και ανατροφοδότηση της εκπαιδευτικού με πιθανά εναλλακτικά σενάρια.

Ο βασικός ισχυρισμός μας σε αυτή την εργασία είναι πως, από τη Δραστηριότητα 1 έως 4, βελτιώνοντας κάθε φορά τη στρατηγική μας μέσα από τον ομαδικό αναστοχασμό, άρχισε να παίρνει μορφή μια νέα κατάσταση στην τάξη όπου οι μαθητές/ήτριες παίρνουν πρωτοβουλία, συνεργάζονται, επικοινωνούν, αναρωτιούνται, αμφισβητούν, επιχειρηματολογούν και – γιατί όχι; – αποδεικνύουν! Δειγματοληπτικά, παρουσιάζουμε εδώ τη διαδικασία ανάπτυξης, σχεδιασμού και εφαρμογής της Δραστηριότητας 1.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ!): ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

Σχεδιάσαμε την δραστηριότητα ώστε να διεξαχθεί μέσα σε μια ψηφιακή τάξη (ΕΞΑΕ, πλατφόρμα Webex, 2 διδακτικές ώρες, με φόρμα Google για τη διευκόλυνση της συλλογής γραπτών απαντήσεων από την εκπαιδευτικό). Το σενάριο βασίζεται σε ένα παιχνίδι ρόλων με μορφή διαλογικής αντιπαράθεσης. Βασικό ρόλο έχουν οι μαθητές/ήτριες ενώ η εκπαιδευτικός συντονίζει και καθοδηγεί διακριτικά. Σκοπός της δραστηριότητας είναι να κατανοήσουν οι μαθητές/ήτριες την έννοια και την αξία της μαθηματικής απόδειξης. *Διδακτικοί στόχοι:* (1) Να ξεχωρίσουν το πείραμα (δοκιμή – εμπειρία) από τη γενίκευση και να προσδιορίσουν την αξία του καθενός (2) Να γνωρίζουν πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα (3) Να εξασκηθούν στην αποδεικτική διαδικασία απλών ταυτοτήτων. *Παιδαγωγικοί στόχοι:* (1) Να αναπτύσσουν εικασίες και υποθέσεις σχετικές με τις έννοιες και τις διαδικασίες του σεναρίου και να τις διατυπώνουν με σαφήνεια (2) Να συμμετέχουν στον διάλογο όλης της τάξης και να συνεισφέρουν με τις ιδέες και τις εκτιμήσεις τους (3) Να στηρίζουν την άποψή τους με λογικά επιχειρήματα, να ελέγχουν τις υποθέσεις τους και να υπερασπίζονται τα συμπεράσματά τους ατομικά, στην ομάδα αλλά και σε όλη την τάξη (4) Να οικοδομούν κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τους/τις συμμαθητές/ήτριες τους και την εκπαιδευτικό. Προαπαιτούμενες γνώσεις: απλές πράξεις με πραγματικούς αριθμούς, επιμεριστική ιδιότητα, πολλαπλασιασμός πολυώνυμου με πολυώνυμο. Η αρχική ιδέα ήταν εμπνευσμένη από δραστηριότητες στην έρευνα των Healy & Hoyles (2000) και την προσαρμογή αυτών από τους Kanellou et al. (2018, σελ. 282). Η τελική μορφή της δραστηριότητας είναι δομημένη σύμφωνα με την τεχνική του role play (Williams, 2012), κατά την οποία οι μαθητές/ήτριες παίρνουν τον ρόλο φανταστικών προσώπων, εκθέτοντας και υποστηρίζοντας τις απαντήσεις και τις θέσεις αυτών γύρω από ένα ζήτημα. Κατασκευάσαμε έναν φανταστικό διάλογο μεταξύ μαθητ(ρι)ών στον οποίο δίνονται τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις στο εξής πρόβλημα:

Να εξηγήσετε γιατί η ισότητα $(\alpha-\beta) \cdot (\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό α και β :

Ο Δημήτρης , η Κατερίνα κι ο Πάνος συζητούν για την ... Ισότητα.

Η καθηγήτρια της τάξης ρώτησε τους μαθητές και τις μαθήτριες να εξηγήσουν γιατί η ισότητα

$$(\alpha - \beta) * (\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2 \quad \text{ισχύει για κάθε αριθμό } \alpha \text{ και } \beta.$$

Σημ.: 1. (*) είναι το σύμβολο του πολλαπλασιασμού
 2. (^) είναι το σύμβολο της δύναμης. Δηλαδή το α^2 διαβάζεται α στο τετράγωνο.

Ο Δημήτρης λέει:

Αν δοκιμάσω μερικές τιμές για τα α και β και κάνω τις πράξεις, βρίσκω το ίδιο αποτέλεσμα στο αριστερό και στο δεξιό μέλος.

Κοίτα για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$, έχω $(2 - 1) * (2 + 1) = 1 * 3 = 3$ για το αριστερό μέλος.

Επίσης έχω $2 * 2 - 1 * 1 = 4 - 1 = 3$ για το δεξιό μέλος.

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Δοκίμασα και άλλους αριθμούς και δουλεύει μια χαρά !
 Επομένως η ισότητα ισχύει για κάθε αριθμό α και β !

Η Κατερίνα λέει:

Θα ξεκινήσω από το αριστερό μέλος ... αν εφαρμόσω την επιμεριστική ιδιότητα θα έχω $\alpha * \alpha + \alpha * \beta - \beta * \alpha - \beta * \beta$ που κάνει $\alpha^2 - \beta^2$.

Επομένως η ταυτότητα ισχύει για κάθε αριθμό α και β !

Ο Πάνος λέει:

Αυτή είναι μία ισότητα από αυτές που έχει το βιβλίο και φυσικά ισχύει για κάθε αριθμό α και β !

Αν ξεκινήσω από το δεξιό μέλος θα έχω

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta) * (\alpha + \beta)$$

Επομένως η ισότητα ισχύει για κάθε αριθμό α και β και γ' αυτό λέγεται ταυτότητα !

A. Εσύ που παρακολουθείς τη συζήτηση προσπάθησε να βοηθήσεις τον Δημήτρη (1η ομάδα) , την Κατερίνα (2η ομάδα) ή τον Πάνο (3η ομάδα) να πείσει τους συμμαθητές του/της ότι η σκέψη του/της είναι σωστή και ολοκληρωμένη . Τι έχεις να του προτείνεις; *

Η απάντησή σας

Ποια πιστεύεις ότι θα είναι η αντίδραση της καθηγήτριας σε αυτό που είπε ο Δημήτρης (1η ομάδα) , η Κατερίνα (2η ομάδα) ή ο Πάνος (3η ομάδα); *

Η απάντησή σας

Εικόνα 1: Η τελική μορφή της Δραστηριότητας 1, Πάρε Θέση!

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ!): ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1^η διδακτική ώρα (35')

Κατά τη διάρκεια της πρώτης διδακτικής ώρας δόθηκε στους/στις μαθητές/ήτριες η δραστηριότητα μέσω chat του Webex αλλά και μέσω της πλατφόρμας ασύγχρονης εξ αποστάσεως διδασκαλίας (Edmodo) για περαιτέρω επεξεργασία και με τις απαραίτητες γραπτές οδηγίες-επεξηγήσεις. Η διανομή των ρόλων έγινε με κατανομή σε ομάδες εργασίας (Breakout Session Assignments) με το εργαλείο του Webex.

Κάθε μια από τις ομάδες μαθητ(ρι)ών κλήθηκε να συζητήσει και να αναπτύξει επιχειρήματα ώστε να υποστηρίξει την απάντηση του Δημήτρη, της Κατερίνας ή του Πάνου (Ερώτημα Α) αλλά και να διαμορφώσει το πιθανό σχόλιο της καθηγήτριας πάνω στην επιχειρηματολογία τους (Ερώτημα Β). Η επιλογή της εργασίας σε ομάδες είχε στόχο την ενεργοποίηση όλων των μαθητ(ρι)ών και την αλληλεπίδραση των μελών της ομάδας.

Στη συνέχεια, κάθε μαθητής/ήτρια ξεχωριστά κατέγραψε τις δικές του/της απαντήσεις με χρήση της φόρμας Google ώστε μέσα από τη γραπτή διατύπωση των επιχειρημάτων να ενισχυθεί και η προσπάθεια υποστήριξης του γλωσσικού γραμματισμού. Οι μαθητές/ήτριες ανταποκρίθηκαν στο σύνολό τους και οι απαντήσεις που έδωσαν είχαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ο ρόλος της εκπαιδευτικού ήταν να δώσει εξ αρχής σαφείς οδηγίες για τη διεξαγωγή της δραστηριότητας αλλά και να απαντήσει σε απορίες των μαθητ(ρι)ών μιας και όλη η διαδικασία ήταν πρωτόγνωρη για τη τάξη.

2^η διδακτική ώρα (40')

Με την έναρξη της δεύτερης διδακτικής ώρας η καθηγήτρια ζήτησε από τις ομάδες των μαθητ(ρι)ών να παρουσιάσουν στην τάξη τα αποτελέσματα της συζήτησης που έλαβε χώρα την προηγούμενη ώρα διατηρώντας τους ρόλους τους. Έτσι ξεκίνησε στην ολομέλεια μια συζήτηση μεταξύ των διαφορετικών ομάδων στην οποία αναδείχθηκαν τα πλεονεκτήματα αλλά και οι ελλείψεις στις απαντήσεις των τριών φανταστικών μαθητ(ρι)ών. Στη συνέχεια – με την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού – οι μαθητές/ήτριες εγκατέλειψαν τους ρόλους τους και εξέφρασαν την προσωπική άποψη που διαμόρφωσαν έπειτα από την αναζήτηση επιχειρημάτων για την υποστήριξη της ομάδας τους και από τη συζήτηση με τις άλλες ομάδες. Η καθηγήτρια βοήθησε τη διαδικασία κάνοντας ερωτήσεις με σκοπό να οδηγήσει τους/τις μαθητές/ήτριες στην ανακάλυψη της «αλήθειας» – της απάντησης που η μαθηματική κοινότητα της τάξης στο εξής ενστερνίζεται ως ορθή – καθώς και στην επισήμανση των κενών που εμφανίζονται στις άλλες απαντήσεις.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1 (ΠΑΡΕ ΘΕΣΗ!): ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Σημειώνουμε πως τα αξιολογικά δεδομένα που χρησιμοποιούμε σε αυτή την εργασία προέρχονται από την μαρτυρία της εκπαιδευτικού και έμμεσα μόνο αναφερόμαστε στην εμπειρία των μαθητ(ρι)ών που συμμετείχαν στη δραστηριότητα (σε «» παραθέτουμε αποσπάσματα από απαντήσεις των μαθητ(ρι)ών όπως τα ανακαλεί η εκπαιδευτικός κατά τον αναστοχασμό). Η δραστηριότητα δόθηκε σε τμήμα της Γ' Γυμνασίου ($23 = 7$ κορίτσια + 16 αγόρια) στο οποίο το επίπεδο των μαθητ(ρι)ών είναι αρκετά καλό και με αρκετά από τα παιδιά να υποστηρίζονται με φροντιστηριακά μαθήματα (γεγονός που πολλές φορές αποτελεί τροχοπέδη στην προσπάθεια ανακάλυψης της γνώσης στη σχολική τάξη).

Η επιχειρηματολογία που αναπτύχθηκε στις γραπτές απαντήσεις των μαθητ(ρι)ών, αλλά και στη συζήτηση στην τάξη, έδειξε ότι η πλειοψηφία θεωρεί πιο κατανοητό τον «τρόπο» που χρησιμοποιεί ο Δημήτρης αν και θα μπορούσε να δώσει μερικές τιμές ακόμα για να το «αποδείξει καλύτερα». Η πλειοψηφία επίσης πιστεύει ότι ο «τρόπος» του Πάνου είναι «πιο μαθηματικός» γιατί «το λέει όπως θα το έλεγε ο δάσκαλος και ύστερα οι μαθητές θα έπρεπε να το διαβάσουν και να το μάθουν». Κάποιοι/ες δεν ικανοποιήθηκαν πλήρως από τον «τρόπο» της Κατερίνας κι έψαχναν να βρουν το λάθος της ωσότου αποκαλύφθηκε ότι δεν είχαν λάβει υπόψη το λεκτικό μέρος της απάντησης («Θα ξεκινήσω από το αριστερό μέλος....») παρά μόνο το μέρος των αλγεβρικών πράξεων.

Οι απαντήσεις στο δεύτερο ερώτημα ποικίλουν. Ξεχωρίζουν δύο μαθητές/τριες που δηλώνουν πως η καθηγήτρια θα ακούσει και τις τρεις απόψεις χωρίς να αποκαλύψει τη σωστή ώστε να επιτρέψει στην τάξη να βρει τη σωστή απάντηση. Αυτό το θεωρούμε ένδειξη πως οι μαθητ(ρι)ες αρχίζουν να αντιλαμβάνονται πως στην τάξη μπορεί να δίνεται περισσότερη έμφαση στη διαδικασία παραγωγής της γνώσης και της μάθησης παρά στο τελικό αποτέλεσμα. Ένα σεβαστό ποσοστό αναθεώρησε την άποψή του έπειτα από τους προβληματισμούς που προέκυψαν από τη συζήτηση και διαμόρφωσε πιο ξεκάθαρη εικόνα για την έννοια της ταυτότητας αλλά και τη διαφορά ανάμεσα στο πείραμα-δοκιμή και τη γενίκευση που απαιτεί η μαθηματική απόδειξη. Διαπίστωσαν ότι παραγωγική ενασχόληση με τη μαθηματική απόδειξη εμπλέκει και τα δύο μέρη και έμαθαν να είναι πιο προσεκτικοί απέναντι σε αληθοφανείς, αλλά όχι ολοκληρωμένες, απαντήσεις.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της συγκεκριμένης δραστηριότητας για τη διδασκαλία της απόδειξης είναι ενθαρρυντικά. Η όλη διαδικασία προσέλκυσε ικανοποιητικά τη συμμετοχή των μαθητ(ρι)ών και αναζωογόνησε το ενδιαφέρον τους, ιδιαίτερα στο πρώτο μέρος. Στο δεύτερο μέρος υπήρξε μικρότερη συμμετοχή και χρειάστηκε η παρότρυνση

από την εκπαιδευτικό ώστε να εκφράσουν τη γνώμη τους περισσότεροι/ες μαθητές/ήτριες (συνολικά συμμετείχαν 10 παιδιά). Σημαντικό ήταν το όφελος και για την εκπαιδευτικό αφού μέσα από αυτή τη δραστηριότητα διαπιστώθηκαν δυσκολίες των μαθητ(ρι)ών και διερευνήθηκαν τρόποι μαθηματικά ουσιαστικοί και παιδαγωγικά ελκυστικοί για να αντιμετωπιστούν αυτές οι δυσκολίες. Τα συμπεράσματα από την εφαρμογή της Δραστηριότητας 1 τροφοδότησαν τη συνέχεια (σχεδιασμός Δραστηριοτήτων 2-4 και πέρα).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως αναφέραμε, τα αξιολογικά δεδομένα που χρησιμοποιούμε σε αυτή την εργασία προέρχονται μόνο από τη μαρτυρία της εκπαιδευτικού. Αναγνωρίζουμε αυτόν τον περιορισμό της εργασίας μας αλλά τονίζουμε πως η έμφασή της είναι η ανάδειξη των χαρακτηριστικών της συνεργασίας της εκπαιδευτικού, του Σ.Ε.Ε. και της ομάδας ερευνητριών. Ενορχηστρώνουμε τώρα τις επόμενες φάσεις αυτής της Έρευνας Δράσης έτσι ώστε η εμπειρία των μαθητ(ρι)ών που συμμετέχουν να πάρει εξίσου κεντρικό ρόλο.

Αυτή η εργασία έχει δειγματοληπτικό χαρακτήρα: παραθέτουμε δείγμα της συνεργασίας μας, με βάση μία δραστηριότητα από τη σειρά δραστηριοτήτων που δοκιμάστηκαν στην τάξη της εκπαιδευτικού. Ισχυριζόμαστε πως η σειρά διευκόλυνε την πρώτη επαφή των μαθητ(ρι)ών με τη μαθηματική απόδειξη, διέγειρε το ενδιαφέρον και την εκτίμησή τους για αυτήν αλλά και προώθησε την ανάπτυξη δεξιοτήτων τεκμηρίωσης, κριτικής σκέψης, ομαδικής εργασίας και διαπραγμάτευσης εναλλακτικών λύσεων προβλήματος στα μαθηματικά. Αρχικό έναυσμα και στόχος ήταν η πρώτη ενασχόληση των μαθητ(ρι)ών με τη μαθηματική αποδειξη. Κατά μία έννοια, η εισαγωγή στις ταυτότητες έδωσε μία απλή και χρονικά κατάλληλη αφορμή για αυτή την ενασχόληση.

Οι Δραστηριότητες 1-4 έκαναν απτή μία απάντηση στο ερώτημα «αν είχαμε μία ώρα ακόμα στο μάθημα των μαθηματικών τι θα την κάναμε;». Η εφαρμογή έγινε στα πλαίσια της επιπρόσθετης «πέμπτης ώρας» του προγράμματος δεξιοτήτων του Ι.Ε.Π., συνδυάζοντας μαθηματικές και πλείστες άλλες δεξιότητες με διαθεματικό τρόπο. Σε αντίθεση με τον επίσημο εκπαιδευτικό σχεδιασμό του προγράμματος δεξιοτήτων – που θέλει τα εργαστήρια δεξιοτήτων διαχωρισμένα από τα «κανονικά» μαθήματα των μαθηματικών – δείξαμε πως μπορούν οι στόχοι του προγράμματος να επιτευχθούν ταυτόχρονα με τους στόχους των «κανονικών» μαθημάτων (στην περίπτωση μας του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών). Το εύρημα είναι μη τετριμμένο: η μικρής κλίμακας παρέμβαση δείχνει ότι, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, είναι εφικτή η μετάβαση από την ασάφεια μεγαλεπήβολων παιδαγωγικών

ενοράσεων στη δημιουργική παιδαγωγική πράξη της τάξης. Επιπλέον τα ευρήματα αντίκεινται στο αποσπασματικό / διασπαστικό αφήγημα περί δεξιοτήτων «μετά» ή «έξω» από την απόκτηση γνώσης. Στη δική μας πρόταση, γνώση και δεξιότητες λαμβάνουν χώρα ταυτόχρονα και διαλεκτικά. Ας δούμε εν συντομίᾳ ποιες είναι οι συνθήκες που ευνόησαν αυτή τη μετάβαση από την ασάφεια στη δημιουργική πράξη.

Το πρώτο χαρακτηριστικό είναι η καινοτομία να είναι «κοινή επιχείρηση» (Wenger, 1998) των εμπλεκομένων μερών. Τα μέλη της ομάδας είχαν διαφορετικά κίνητρα (παιδαγωγικά, ερευνητικά, θεσμικά). Ο σχεδιασμός και η εφαρμογή των δραστηριοτήτων αποτέλεσε το μέσο για την επίτευξη των επιμέρους στόχων: η καθηγήτρια ήθελε να εμπλέξει τη τάξη με την (μαθηματική) επιχειρηματολογία στα εργαστήρια δεξιοτήτων, ο Σ.Ε.Ε. να υποστηρίξει τη καινοτομία στο σχολείο προωθώντας παράλληλα την ομαλή εισαγωγή των μαθητ(ρι)ών στην απόδειξη και οι ερευνήτριες να προχωρήσουν την έρευνα τους με την εμπλοκή μαθητ(ρι)ών με δραστηριότητες του MathTASK προγράμματος.

Το δεύτερο είναι η δημιουργία πλαισίου που ευνοεί την ισότιμη εμπλοκή (Wenger, 1998) όλων των μερών και επιτρέπει αναστοχασμό και ανατροφοδότηση. Η έρευνα δράσης (Elliott, 1991) προσέφερε το κατάλληλο πλαίσιο συνεργασίας. Κατά τη διάρκεια της συνεργασίας, η οποία είναι μακρόχρονη και αποτελείται από κύκλους, η εκπαιδευτικός, ο Σ.Ε.Ε. και οι ερευνήτριες εμπνέονται από τη πράξη, μελετούν έρευνες και τις εφαρμόζουν στην τάξη, παίρνουν ανατροφοδότηση από την εφαρμογή, προσαρμόζουν τις πρακτικές τους και επικοινωνούν με άλλους εκπαιδευτικούς (όλη η ομάδα είχε την ευκαιρία να συζητήσει με άλλους εκπαιδευτικούς σε μορφή σεμιναρίων του Πε.Κ.Ε.Σ. της περιοχής εμπνευσμένα από αυτή τη δράση).

Το τρίτο είναι η ισότιμη αλλά διακριτά διαφορετική συνεισφορά των μελών της ομάδας. Η εκπαιδευτικός ανατροφοδοτεί την ομάδα ως προς σχολικές ανάγκες (λόγος της διδακτικής πρακτικής), οι ερευνήτριες ανατροφοδοτούν την ομάδα με τα ερευνητικά δεδομένα (βιβλιογραφία, θεωρητικά και μεθοδολογικά εργαλεία: λόγος την επιστημονικής κοινότητας) ενώ ο Σ.Ε.Ε. είναι ο «διαμεσολαβητής» (Wenger, 1998) που αποτελεί τον συνδετικό κρίκο μεταξύ έρευνας και πράξης (Hjalmarson & Baker, 2020), διευκολύνει την εφαρμοσιμότητα της έρευνας και δίνει θεσμική διάσταση στη δράση. Η επιτυχία της δράσης κρίνεται από τη δημιουργία κοινού λόγου σε ομάδα που έχει «κοινή επιχείρηση» ενώ αναγνωρίζει τις διαφορετικές ανάγκες των μελών της.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε θερμά το Περιφερειακό Κέντρο Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού (Πε.Κ.Ε.Σ.) Κρήτης όπως επίσης και το Σχολείο, τις μαθήτριες και τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνά μας. Η φάση του προγράμματος MathTASK στη οποία αναφερόμαστε σε αυτή την εργασία χρηματοδοτήθηκε από το *Pro-Vice Chancellor's Impact Fund* (No ICF202105) στο UEA.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Askew, M. (2020). Reasoning as a mathematical habit of mind. *The Mathematical Gazette*, 104(559), 2-11.
- Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 301–309.
- Elliott, J. (1991). *Action research for educational change*. Open University Press.
- Hjalmarson, M. A., & Baker, C. K. (2020). Mathematics specialists as the hidden players in professional development. *International Journal of Science and Mathematics Education* 18 (supplement), S51–S66.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(4), 396–428.
- Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.). Κύκλοι Δεξιοτήτων. Κύκλοι Δεξιοτήτων - Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (iep.edu.gr).
- Kanellos, I., Nardi, E. & Biza, I. (2018). Proof Schemes combined: Mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof. *Mathematical Thinking and Learning* 20(4), 277–294.
- Potari, D., Sakonidis, C., Chatzigoula, A. & Manaridis, A. (2010). Teachers' and researchers' collaboration in analyzing mathematics teaching: A context for professional reflection and development. *Journal of Mathematics Teacher Education* 13, 473-485.
- Wagner, J. (1997). The unavoidable intervention of educational research: A framework for reconsidering researcher-practitioner cooperation. *Educational Researcher* 26(7), 13-22.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge University Press.
- Williams, H. (2012). To what extent might role-play be a useful tool for learning mathematics? *Mathematics Teaching*, 230, 17–20.