ΟΙ ΕΡΕΥΝΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΞΗ: ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΩΝ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Πετροπούλου Γεωργία[1], Μάλη Αγγελική[2], Μπιζά Ειρήνη[3]

[1]Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, [2]University of Groningen, [3]University of East Anglia

gpetrop@math.uoa.gr, a.mali@rug.nl, i.Biza@uea.ac.uk

Σε αυτό το άρθρο εξετάζουμε διδακτικές πρακτικές ερευνητών μαθηματικών σε Ελλάδα και Αγγλία σε σχέση με πρακτικές που οι ίδιοι χρησιμοποιούν στην έρευνά τους στα μαθηματικά. Τα δεδομένα προέρχονται από την παρατήρηση διδασκαλιών σε φοιτητές και συζητήσεις με τους διδάσκοντες. Εντοπίζουμε διδακτικές πρακτικές όπως είναι η αξιοποίηση παραδειγμάτων, η σύνδεση μαθηματικών περιοχών, η οπτικοποίηση και η απλοποίηση που συνδέονται με πρακτικές της μαθηματικής έρευνας. Συζητούμε πώς η σαφής χρήση αυτών των πρακτικών στη διδασκαλία δίνει στους φοιτητές τη δυνατότητα να επεκτείνουν τον Μαθηματικό τους Ορίζοντα και δυνητικά να προετοιμαστούν για την σχολική εκπαίδευση.

Η εκπαίδευση των μελλοντικών εκπαιδευτικών που θα διδάξουν μαθηματικά στο σχολείο, διεθνώς, παρά τις διαφορές από χώρα σε χώρα, περιλαμβάνει συχνά πανεπιστημιακά μαθηματικά τα οποία διδάσκονται από ερευνητές μαθηματικούς (Leikin, Zazkis & Meller, 2017). Η έρευνα στη Διδακτική των μαθηματικών έχει δείξει ενδιαφέρον για τις διδακτικές πρακτικές που αυτοί οι ερευνητές υιοθετούν, καθώς και για την επίδραση των ερευνητικών τους πρακτικών στη διδασκαλία τους (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz & Rasmussen, 2016). Για αρκετούς από τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς η συνάφεια πανεπιστημιακής εκπαίδευσης και σχολικής διδασκαλίας είναι ασαφής (Zazkis & Leikin, 2010), καθώς το μαθηματικό περιεχόμενο των μαθημάτων που διδάσκονται στο πανεπιστήμιο απέχει από αυτό του σχολείου. Φαίνεται να λείπει η σύνδεση ανάμεσα στην προχωρημένη μαθηματική γνώση δηλαδή «τη γνώση του αντικειμένου που αποκτάται κατά τη διάρκεια των πανεπιστημιακών σπουδών» (Zazkis & Leikin, 2010, σ. 264) και στα μαθηματικά του σχολείου. Αναφερόμαστε στο συνδετικό κρίκο που συνδέει τα πανεπιστημιακά μαθηματικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο χρησιμοποιώντας τη μεταφορά του *Μαθηματικού Ορίζοντα* (*Mathematical Horizon)* που προτάθηκε από τους Ball, Thames & Phelps (2008), και εξετάζουμε τη σχέση του Μαθηματικού Ορίζοντα με τις ερευνητικές πρακτικές στα μαθηματικά των διδασκόντων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η θεωρητική οπτική που υιοθετούμε δε διαχωρίζει τη γνώση των εκπαιδευτικών από τη διδακτική πράξη και το κοινωνικό και θεσμικό περιβάλλον στο οποίο οι διδάσκοντες δρουν. Η γνώση διαμορφώνεται στην πράξη, καθώς οι διδάσκοντες διδάσκουν μαθηματικά και εργάζονται πάνω στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, ο Μαθηματικός Ορίζοντας (Ορίζοντας σε συντομία, Ball κ.α., 2008) των εκπαιδευτικών ενώνει τα πανεπιστημιακά με τα σχολικά μαθηματικά και περιλαμβάνει στοιχεία μαθηματικής επίγνωσης πέρα από το περιεχόμενο που πρέπει να διδαχθεί, στοιχεία πρακτικής (μαθηματικής και διδακτικής) και στοιχεία αναστοχασμού (Mali, Petropoulou, Biza & Hewitt, υπό έκδοση). Σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο, ο Ορίζοντας των μελλοντικών εκπαιδευτικών μπορεί να περιλαμβάνει στοιχεία μαθηματικών πρακτικών – δηλαδή πρακτικών που αφορούν στο έργο των ερευνητών σε σχέση με το αντικείμενο των μαθηματικών και όχι σε σχέση με τη διδασκαλία του - όπως η επίλυση προβλήματος, καθώς και συνδέσεις εντός του μαθηματικού περιεχομένου (Figueiras κ.α., 2011). Αυτοί που είναι ειδικοί και στα δύο (μαθηματικές πρακτικές και συνδέσεις) είναι οι ερευνητές μαθηματικοί. Ωστόσο, το ότι οι ίδιοι είναι ειδικοί δε σημαίνει απαραίτητα ότι επικοινωνούν με *σαφήνεια* την εμπειρία τους με τους φοιτητές, για παράδειγμα προσφέροντας *μετασχόλια* (*meta-comments*, Jaworski, Treffert-Thomas & Bartsch, 2009) για τον ρόλο, τη σημασία και τις συνδέσεις ενός ορισμού ή θεωρήματος με την ευρύτερη μαθηματική θεωρία. Η σαφής επικοινωνία της εμπειρίας των ερευνητών στους φοιτητές είναι σημαντική, καθώς ακριβώς αυτή η επικοινωνία μπορεί να βοηθήσει τους φοιτητές να διευρύνουν τον Ορίζοντά τους (Figueiras κ.α., 2011). Η καλλιέργεια του Ορίζοντα των φοιτητών - οι οποίοι έχουν την επιλογή να γίνουν καθηγητές μαθηματικών στο σχολείο και διδάσκονται από ερευνητές μαθηματικούς - είναι ζητούμενη, καθώς αυξάνει τις πιθανότητες των ευκαιριών μάθησης για τους μαθητές τους στο μέλλον.

Σε προηγούμενη έρευνα (Mali & Petropoulou, 2017) αναπτύχθηκε ένα αναλυτικό πλαίσιο το οποίο περιγράφει τη διδασκαλία των ερευνητών μαθηματικών μέσα από τέσσερεις βασικές πρακτικές – την επιλογή έργων, την παροχή εξηγήσεων, την αξιολόγηση, και την επέκταση της μαθηματικής σκέψης των φοιτητών - με λεπτομερείς αναφορές σε επιμέρους θεματικά συνδεδεμένες πρακτικές και εργαλεία εντός κάθε μίας από τις τέσσερεις βασικές πρακτικές. Σχετικές με τον Ορίζοντα των φοιτητών είναι οι πρακτικές επέκτασης – αυτές είναι διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιούνται για να μυήσουν τους φοιτητές σε προχωρημένες μαθηματικές πρακτικές. Για παράδειγμα, η διατύπωση μιας μαθηματικής εικασίας μέσα από εργαλεία όπως είναι τα αντιπαραδείγματα για την απόρριψη ενός μη έγκυρου ισχυρισμού και οι γραφικές αναπαραστάσεις προέρχονται από την έρευνα των ερευνητών μαθηματικών (Πετροπούλου, Ζαχαριάδης, & Πόταρη, 2014).

Οι διδακτικές πρακτικές των ερευνητών μαθηματικών που έχουν την δυνατότητα να αναπτύξουν τον Ορίζοντα των μελλοντικών εκπαιδευτικών αναδεικνύονται στη βιβλιογραφία από έρευνες σχετικά με τις προοπτικές της συνδιδασκαλίας από ερευνητές μαθηματικούς και εκπαιδευτές εκπαιδευτικών ιδίως στη γεφύρωση της πανεπιστημιακής και της σχολικής διδασκαλίας (π.χ. Leikin κ.α., 2017). Άλλες έρευνες στηρίζουν την άποψη ότι οι ερευνητικές πρακτικές έχουν τη δυνατότητα να επηρεάσουν τον τρόπο διδασκαλίας (Petropoulou, Potari & Zachariades, 2011) και μάλιστα εμπλουτίζουν την διδασκαλία (Misfeldt & Johansen, 2015). Στην παρούσα εργασία προχωράμε περαιτέρω αυτή την άποψη με το επιχείρημα ότι πρέπει να γίνει ρητή η επίδραση των ερευνητικών πρακτικών στον τρόπο διδασκαλίας όπως επίσης και η σαφής επικοινωνία στους φοιτητές αυτών των πρακτικών ακριβώς την ώρα που χρησιμοποιούνται. Όπως και στο Mali κ.α. (υπό έκδοση), σε αυτό το άρθρο εξετάζουμε τις διδακτικές πρακτικές πέντε ερευνητών μαθηματικών που διδάσκουν απειροστικό λογισμό σε Ελλάδα και Αγγλία μέσω παρατηρήσεων της διδασκαλίας τους και συζητήσεων μαζί τους. Συγκεκριμένα, ανιχνεύουμε πώς οι διδακτικές τους πρακτικές σχετίζονται με τις ερευνητικές τους πρακτικές. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε τα ερευνητικά ερωτήματα: (α) ποιες πρακτικές επέκτασης υιοθετούν οι ερευνητές μαθηματικοί στη διδασκαλία τους προς φοιτητές των μαθηματικών; και (β) πώς αυτές οι πρακτικές έχουν τη δυνατότητα να διευρύνουν τον Μαθηματικό Ορίζοντα των φοιτητών, αν θεωρήσουμε ότι αυτοί θα γίνουν εκπαιδευτικοί;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνούμε τη φύση των πρακτικών που θα μπορούσαν να διευρύνουν τον Ορίζοντα των φοιτητών αξιοποιώντας εμπειρικά δεδομένα που προέρχονται από δύο μελέτες που διεξήχθησαν σε Αγγλία (Mali, 2016) και Ελλάδα (Πετροπούλου, 2018). Επιλέξαμε τα πανεπιστήμια στα οποία συλλέχθηκαν τα δεδομένα αυτών των μελετών γιατί έχουν Μαθηματικά Τμήματα όπου τα εργαστήρια (tutorials) σε λίγους φοιτητές (2-8) και οι παραδόσεις σε μεγάλα ακροατήρια (άνω των 100 ατόμων) είναι θεσμοθετημένη παράδοση. Είναι σημαντικό για εμάς το ότι αξιοποιούμε δεδομένα και από παραδόσεις και από εργαστήρια σε διαφορετικές χώρες γιατί μας επιτρέπει να εντοπίσουμε κοινές πρακτικές. Οι διδάσκοντες που συμμετέχουν στις δύο έρευνες είναι ερευνητές και πεπειραμένοι στη διδασκαλία με διδακτική πείρα άνω των 20 ετών. Το μάθημα που παρατηρήθηκε είναι ο απειροστικός λογισμός του πρώτου έτους, μάθημα υποχρεωτικό για όλους τους φοιτητές.

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια δύο ακαδημαϊκών ετών και αποτελούνται από σημειώσεις πεδίου, παρατηρήσεις της διδασκαλίας και ηχογραφημένες συζητήσεις με τους διδάσκοντες, δύο ερευνητές μαθηματικούς στην Αγγλία και τρεις στην Ελλάδα. Οι συζητήσεις με τους διδάσκοντες βασίζονται στις παρατηρήσεις της διδασκαλίας τους και αφορούν σε πιο λεπτομερείς θεωρήσεις που αυτοί έχουν σχετικά με τις διδακτικές τους πρακτικές. Οι παρατηρήσεις αναδεικνύουν το πώς οι διδάσκοντες επικοινωνούν τη χρήση μαθηματικών πρακτικών στους φοιτητές τους, για παράδειγμα υπό τη μορφή *μετασχολίων* (Jaworsi, κ.α., 2009). Τα αποσπάσματα που παρουσιάζουμε, για λόγους χώρου, προέρχονται από δύο διδάσκοντες στην Αγγλία (Τ1, Τ2) και έναν στην Ελλάδα (Κ1). Οι ερευνητές αυτοί συμμετείχαν εθελοντικά στις έρευνες και η αλληλεπίδραση με τους φοιτητές είναι τυπική στη διδασκαλία τους.

Σε πρώτο επίπεδο εξετάσαμε, μέσω διττής προσέγγισης των δεδομένων «από την κορυφή προς τα κάτω» και «από τη βάση προς τα πάνω», τυπικές διδακτικές πρακτικές των συμμετεχόντων που ήταν κοινές και είχαν τη δυνατότητα να διευρύνουν τον Ορίζοντα των φοιτητών. Αναγνωρίσαμε τις πρακτικές, αξιοποίηση παραδειγμάτων, σύνδεση μαθηματικών περιοχών, οπτικοποίηση και απλοποίηση. Ερμηνεύσαμε από τις συζητήσεις με τους συμμετέχοντες ότι τέτοιες πρακτικές έχουν πρόθεση να επεκτείνουν τη μαθηματική σκέψη των φοιτητών ώστε, για παράδειγμα, να «βλέπουν» συνδέσεις ανάμεσα σε μαθηματικές περιοχές. Σε δεύτερο επίπεδο εστιάσαμε στη φύση αυτών των πρακτικών, αρχικά κατανοώντας τις (μέσα από τους στόχους που διατύπωσαν οι ίδιοι οι διδάσκοντες) και, στη συνέχεια, συνδέοντας τον τρόπο υλοποίησής τους με τις ερευνητικές πρακτικές των διδασκόντων (μέσα από τις παρατηρήσεις της διδασκαλίας και τις συζητήσεις μαζί τους). Τα αποσπάσματα από τα δεδομένα που παρουσιάζουμε επιλέχθηκαν από ένα ευρύτερο σύνολο διδακτικών πρακτικών επέκτασης που προσδιορίσαμε (περιλαμβάνονται σε Mali κ.α., υπό έκδοση) και διευκρινίζουν περαιτέρω την πορεία ανάλυσης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Ορίζοντας των φοιτητών και η διεύρυνσή του στο πανεπιστήμιο είναι ένα ζήτημα που απασχολεί τους διδάσκοντες. Οι ίδιοι εκτιμούν ότι η ερευνητική τους δραστηριότητα στα μαθηματικά είναι αυτή που τους παρέχει μία συνολική εικόνα των μαθηματικών και, για κάποιους, που τους παρέχει τη δυνατότητα να «περάσουν» και στους φοιτητές τους αυτή την ευρύτερη εικόνα. Στο παρακάτω απόσπασμα ο Κ1 περιγράφει αυτό που εμείς ονομάζουμε Ορίζοντα έστω και χωρίς να τον κατονομάζει ως τέτοιο:

> Για έναν που διδάσκει Απειροστικό στο πρώτο έτος και είναι ερευνητής μαθηματικών η έρευνα που έχει κάνει στα μαθηματικά του δίνει την κατεύθυνση. Τη συνολική τοποθέτηση αυτού του αντικειμένου, τι είναι σημαντικό και τι είναι δευτερεύον, τριτεύον, και πώς αυτό θα το περάσεις στους φοιτητές. Που αυτό μπορεί να διαφέρει από έναν ερευνητή σε άλλον. Αλλά που όμως καθένας [ερευνητής] έχει ένα συγκεκριμένο τρόπο να βλέπει τα μαθηματικά. (Κ1, Χειμερινό εξάμηνο, 2ο έτος)

Η ανάλυση ανέδειξε την πρόθεση των συμμετεχόντων να κάνουν σαφή στους φοιτητές τη συνολική εικόνα του μαθηματικού αντικειμένου που έχουν οι ίδιοι μέσα από την έρευνά τους. Στις παρακάτω υποενότητες δίνουμε παραδείγματα για τον τρόπο με τον οποίο αυτή η πρόθεση υλοποιείται στη διδασκαλία μέσα από τον *μετασχολιασμό* των διδασκόντων και προσδιορίζουμε τέσσερεις κατηγορίες *διδακτικών πρακτικών επέκτασης*.

1. Η αξιοποίηση παραδειγμάτων

Η προσφυγή σε παραδείγματα είναι συνήθης πρακτική για την παραγωγή νέας μαθηματικής γνώσης. Αυτή η ευρετική που οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούν στην έρευνά τους έρχεται και στη διδασκαλία τους μέσα από τον σαφή *μετασχολιασμό* προς τους φοιτητές τους. Για παράδειγμα, σε ένα εργαστήριο οι φοιτητές δυσκολεύονται να καθορίσουν αν μία συγκεκριμένη σύνθετη συνάρτηση είναι 1-1. Η Τ1 ζητά από τους φοιτητές να δώσουν παραδείγματα 1-1 συναρτήσεων για να εκμαιεύσει τον ορισμό της 1-1 συνάρτησης. Αυτοί προτείνουν πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές και λογαριθμικές συναρτήσεις. Έπειτα, ξεκινά μία συζήτηση (σχετικά με τα χαρακτηριστικά που έχουν όλες αυτές οι συναρτήσεις τα οποία τις καθιστούν 1-1 σε διαστήματα) και η Τ1 προσφέρει το εξής μετασχόλιο:

> Στα μαθηματικά [...] από το σύνολο των παραδειγμάτων που έχουμε, καταλήγουμε σε μία ιδέα [έναν ορισμό] και στη συνέχεια μπορούμε να τσεκάρουμε αυστηρά αν κάτι περιέχεται σε αυτή την ιδέα ή όχι. Και αυτό που συμβαίνει στα μαθηματικά είναι ότι αν δούμε μία πιο γενική εκδοχή των πραγμάτων που δεν ταιριάζει μεν με την ιδέα που αναπτύξαμε, αλλά που συνεχίζει να έχει κάποια κοινά χαρακτηριστικά, τότε δημιουργούμε έναν νέο ορισμό που είναι ακόμα πιο γενικός. Έτσι καταλήγουμε σε νέους ορισμούς κάθε

> φορά που αναγνωρίζουμε ότι υπάρχουν κάποια σύνολα δομών που έχουν σχέση μεταξύ τους. [...] Αν κοιτάξετε και την ιστορία των μαθηματικών θα δείτε ότι οι άνθρωποι δεν είχαν την ιδέα της συνάρτησης. Αυτό που είχαν ήταν πολλά παραδείγματα συναρτήσεων από τα οποία προσπαθούσαν να βγάλουν τα κρίσιμα χαρακτηριστικά. Καταλαβαίνετε; (Τ1, Εαρινό εξάμηνο, 1ο έτος)

Το παραπάνω απόσπασμα αποτελεί *μετασχολιασμό* πάνω στην πρακτική μίας ερευνήτριας η οποία αξιοποιεί παραδείγματα από την έρευνά της για την παραγωγή ενός νέου ορισμού. Ο *μετασχολιασμός* της Τ1 περικλείει την οπτική της για τη φύση των μαθηματικών και επικοινωνεί σαφώς στους φοιτητές την εμπειρία της σε σχέση με την παραγωγή νέων μαθηματικών μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων. Ο *μετασχολιασμός* είναι σημαντικός προσφέροντας μία πιθανή ευκαιρία διεύρυνσης του Ορίζοντα των φοιτητών σχετικά με τη δημιουργία ενός νέου μαθηματικού ορισμού.

2. Η σύνδεση μαθηματικών περιοχών

Οι συνδέσεις (π.χ. μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών) αποτελούν την καρδιά της μαθηματικής ανακάλυψης. Κάποιοι ερευνητές μαθηματικοί ορίζουν τα ίδια τα μαθηματικά ως συνδέσεις. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι η σαφήνεια μιας τέτοιας σημαντικής πρακτικής στα μαθηματικά θα μπορούσε να προσφέρει στους φοιτητές την ευκαιρία να διευρύνουν τον μαθηματικό τους Ορίζοντα.

Σε μία παράδοση σχετικά με τη σύγκλιση άπειρων σειρών, ο Κ1 προκαλεί τους φοιτητές του να σκεφτούν για ποιόν λόγο ο αριθμός 0,3… είναι ρητός, παρόλο που έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ο Κ1 εξηγεί με σαφήνεια στους φοιτητές τον λόγο για τον οποίο ο αριθμός 0,3… είναι ακριβώς ίσος με 1/3: με ένα μετασχόλιο συνδέει τον αριθμό 0,3… με την άπειρη γεωμετρική σειρά 3/10 + 3/100+3/1000+… που συγκλίνει στο 1/3. Αποσαφηνίζοντας ότι η σύνδεση του αριθμού 0,3… με τη γεωμετρική σειρά 3/10 + 3/100+3/1000+… είναι αυτή που εξασφαλίζει την ισότητα 0,3… = 1/3, ο Κ1 επιχειρεί να στρέψει τη σκέψη των φοιτητών του από το *πώς* ο αριθμός 0,3… γράφεται ως κλάσμα 1/3 στο *γιατί* αυτός ο αριθμός, παρόλο που έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, είναι ίσος με 1/3. Στη συζήτηση μετά την παράδοση, ο Κ1 σχολιάζει σχετικά με αυτή την πρακτική της σύνδεσης διαφορετικών μαθηματικών περιοχών (σειρών και ρητών) ότι «οι φοιτητές πρέπει να μάθουν πώς να σκέφτονται μαθηματικά» και ότι «τα μαθηματικά δεν είναι τίποτα άλλο από συνδέσεις». Η σύνδεση αυτή προσφέρει στους φοιτητές τη μαθηματική αιτιολογία της ισότητας 0,3.. = 1/3 πιθανά επεκτείνοντας τον Ορίζοντα τους σχετικά με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός αριθμού (π.χ. 0,999… = 1).

3. Η οπτικοποίηση

Η οπτικοποίηση ως μέσο για να αποκτήσει κανείς διαισθητική εμπειρία των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών είναι κοινή πρακτική, τόσο στην έρευνα στα μαθηματικά, όσο και στη διδασκαλία τους. Για τους ερευνητές μαθηματικούς, η σχεδίαση διαγραμμάτων και γραφημάτων είναι μία σημαντική ευρετική μέθοδος. Για τη διδασκαλία, είναι μία συνήθης πρακτική που βοηθά την κατανόηση εννοιών.

Για παράδειγμα, σε ένα εργαστήριο, οι φοιτητές έχουν να γράψουν την παράσταση

$\left||x|-1\right|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Επειδή συναντούν δυσκολίες, ο Τ2 τους προτρέπει να σκεφτούν την παράσταση αυτή γεωμετρικά προτείνοντάς τους ότι: «μπορούμε απλά να σχεδιάσουμε ένα γράφημα της συνάρτησης» και συνεχίζοντας: «Λοιπόν, πώς λύνω αυτό το πρόβλημα; Θα σας δείξω. Θα το κάνω βήμα-βήμα». Στη συνέχεια, ο Τ2 κατασκευάζει διαδοχικά γραφήματα για τις συναρτήσεις $y = x$, $y = |x|$, $y = |x| - 1$ και $y = \left||x|-1\right|$. «Τώρα μπορείτε να δείτε ότι [η παράσταση $\left||x|-1\right|$] αποτελείται από διαφορετικούς κλάδους σε διαφορετικά διαστήματα». Η σύσταση του Τ2 προς τους φοιτητές να σκεφτούν την παράσταση $\left||x|-1\right|$ πρώτα γεωμετρικά προέρχεται από τη γεωμετρική οπτική που ο ίδιος έχει στην έρευνά του (είναι Γεωμέτρης), όπως λέει: «Αν είσαι Γεωμέτρης, αναζητάς γεωμετρικές λύσεις, νομίζω εξαρτάται από το ερευνητικό σου υπόβαθρο. [...] Για εμένα είναι πιο εύκολο να δω το γράφημα» (Τ2, Χειμερινό εξάμηνο, 2ο έτος). Θα λέγαμε ότι για εκείνον ο Ορίζοντας περιλαμβάνει μαθηματικά οπτικοποιημένα σε γραφήματα και διαγράμματα.

4. Η απλοποίηση

Η απλοποίηση ενός μαθηματικού προβλήματος συνίσταται στη μείωση της πολυπλοκότητάς του μέσα από τη χρήση ενός ανάλογου, αλλά πιο εύκολου, προβλήματος. Πρόκειται για ευρετική που χρησιμοποιείται από ερευνητές μαθηματικούς τόσο στη μαθηματική τους έρευνα όσο και στη διδασκαλία τους. Απαιτεί να διακρίνει κανείς τα ουσιαστικά μαθηματικά χαρακτηριστικά του αρχικού προβλήματος και να δημιουργήσει με αυτά ένα απλούστερο πρόβλημα αγνοώντας τις περιττές λεπτομέρειες. Ο Κ1 περιγράφει πώς χρησιμοποιεί την απλοποίηση στη διδασκαλία του:

> Στην τάξη κάνω κάτι που στην πραγματικότητα είναι φιλοσοφία ερευνητική. Αυτό που έχω μάθει πολύ καλά ακόμα και όταν ασχολούμαι με την έρευνα είναι: έχω ένα πρόβλημα, συνέχεια απλοποιώ. Στοχεύω την έννοια στο πιο απλό πρόβλημα. Για να τη ξεχωρίσω εντελώς. Και από εκεί και πέρα θα χτίσω σιγά-σιγά και θα δώσω το πραγματικό πρόβλημα που με απασχολεί. Έτσι; Άλλο είναι το πραγματικό πρόβλημα αλλά, θα το απλοποιήσω, θα το φτάσω εκεί έτσι ώστε να είναι ξεκάθαρο σε όλους τους φοιτητές γιατί κάνω αυτό που κάνω στο πιο απλό πρόβλημα. Και μετά θα χτίσω σιγά-σιγά και θα πάω στο πραγματικό πρόβλημα που με απασχολεί.
>
> (Κ1, Εαρινό εξάμηνο, 2ο έτος)

Σε μία παράδοση σχετικά με τη σύγκλιση σειρών, για παράδειγμα, ο Κ1 καλεί τους φοιτητές να «μαντέψουν» πότε μία σειρά μπορεί να συγκλίνει (όταν η ακολουθία είναι μηδενική) συγκρίνοντας δύο παραδείγματα που είχαν ήδη συζητηθεί: τη συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά $\sum_{\kappa=0}^{+\infty} x^{\kappa}$ με $|x| < 1$ και την αποκλίνουσα σειρά

$\sum_{\kappa=1}^{+\infty}(-1)^{\kappa}$. Όταν οι φοιτητές εστιάζουν σε άσχετες λεπτομέρειες, όπως το ότι η γεωμετρική σειρά συγκλίνει γιατί έχει μεταβλητή ενώ η άλλη όχι, ο Κ1 απλοποιεί το παράδειγμα της γεωμετρικής σειράς στη σειρά $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{10}\right)^{\kappa}$ ώστε οι δύο σειρές «να μοιάζουν». Το νέο παράδειγμα, ανάλογο με το αρχικό (|-1/10| < 1), παρέχει στους φοιτητές τη δυνατότητα να σκεφτούν την ουσία του μαθηματικού προβλήματος ακριβώς λόγω της απλότητάς του. Φαίνεται ότι ο Κ1 με ερωτήσεις και κατάλληλα απλοποιημένα παραδείγματα προσπαθεί να διευκολύνει τους φοιτητές να φθάσουν σε μαθηματικές εικασίες διευρύνοντας τον Ορίζοντά τους σχετικά με τη λύση μαθηματικών προβλημάτων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι ερευνητές μαθηματικοί που συμμετείχαν σε αυτή την έρευνα έδειξαν ότι είχαν επίγνωση ότι η διδασκαλία τους επηρεάζεται από την έρευνά τους στα μαθηματικά. «Στην τάξη κάνω κάτι που στην πραγματικότητα είναι φιλοσοφία ερευνητική» ανέφερε χαρακτηριστικά ο Κ1 λίγο πιο πάνω. Οι πρακτικές που υιοθετούσαν στη διδασκαλία με επιρροές από τις ερευνητικές τους πρακτικές περιλάμβαναν τη χρήση παραδειγμάτων (π.χ. με στόχο την ανακάλυψη κοινών χαρακτηριστικών), τη σύνδεση διαφορετικών μαθηματικών περιοχών (π.χ. αριθμούς με σειρές), την οπτικοποίηση (π.χ. τη σχεδίαση γραφημάτων), και την απλοποίηση (π.χ. τη χρήση ενός λιγότερου πολύπλοκου παραδείγματος). Το σύνολο τέτοιων πρακτικών επέκτασης της μαθηματικής σκέψης των φοιτητών που υιοθετεί κάθε ένας από τους συμμετέχοντες συνιστά ένα μοναδικό διδακτικό πορτραίτο με διαφορετική οπτική των μαθηματικών – γεωμετρική, φορμαλιστική κ.λ.π. Όμως, το σημαντικό είναι ότι η φύση τέτοιων πρακτικών μπορεί να εμπεριέχει την επίγνωση η χρήση τους έρχεται από την έρευνα στα μαθηματικά και, επιπλέον, ότι οφείλει να γίνει σαφής στους φοιτητές μέσα από σχετικό μετασχολιασμό. Ένας τέτοιος σχεδιασμός έχει την προοπτική να προσφέρει ευκαιρίες στους φοιτητές, που φιλοδοξούν να γίνουν μελλοντικοί εκπαιδευτικοί, να αναπτύξουν αυθεντικά βιώματα μύησης στην παραγωγή νέας μαθηματικής γνώσης κατά την πανεπιστημιακή τους εκπαίδευση. Αυτές οι ευκαιρίες και τα βιώματα μπορούν να διαμορφώσουν τη βάση της μελλοντικής τους διδασκαλίας – πώς βλέπουν οι ίδιοι τα μαθηματικά, τη φιλοσοφία που αναπτύσσουν για τη διδασκαλία και, ως επακόλουθο, την επέκταση του Ορίζοντα των μελλοντικών μαθητών τους.

Θεωρούμε ότι τα ευρήματα της παρούσας μελέτη έχουν δυνατότητες και προοπτικές. Οι δυνατότητες αφορούν στην επέκταση του Ορίζοντα των μελλοντικών εκπαιδευτικών μέσα από το συνδυασμό επίγνωσης και σαφήνειας στη διδασκαλία – *επίγνωσης* των ερευνητών διδασκόντων ότι οι πρακτικές της έρευνάς τους στα μαθηματικά μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία τους και *σαφήνειας* των ίδιων προς τους φοιτητές τους σχετικά με τη χρήση τέτοιων μαθηματικών πρακτικών. Οι προοπτικές έγκεινται στον ρόλο της Διδακτικής των μαθηματικών σε αυτή την επέκταση του Ορίζοντα. Καθώς η έρευνα για τη διδασκαλία εγείρει την ενημερότητα (ερευνητών της Διδακτικής και διδασκόντων) για τον τρόπο που αυτή πραγματοποιείται (Jaworski, 2006), η ενημέρωση αμφότερων για τη σχέση έρευνας και διδασκαλίας μπορεί να προσφέρει στη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο. Τα παραπάνω αναμφισβήτητα προϋποθέτουν συνεργασία ερευνητών Διδακτικής και διδασκόντων, συνεργασία που τείνει να γίνει *κουλτούρα* σε ορισμένα μαθηματικά τμήματα διεθνώς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., & Rasmussen, C. (2016). Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-Art and Looking Ahead. In I. Biza, V. Giraldo, R. Hochmuth, A. Khakbaz & C. Rasmussen (Eds.), *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level* (pp. 1-32). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Figueiras, L., Ribeiro, C. M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. O. R. D. I. (2011). Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics. 31*(3), 26-28.

Jaworski, B., Treffert-Thomas, S., & Bartsch, T. (2009). Characterising the teaching of university mathematics: a case of linear algebra. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 249-256). Thessaloniki, Greece: PME.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of mathematics teacher education, 9*(2), 187-211.

Leikin, R., Zazkis, R., & Meller, M. (2017). Research mathematicians as teacher educators: Focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(5), 451-473.

Mali, A. (2016). *Lecturers' tools and strategies in university mathematics teaching: an ethnographic study* (Doctoral dissertation). Loughborough University, Loughborough, UK.

Mali, A., Petropoulou, G., Biza, I. & Hewitt, D. (υπό έκδοση). The research mathematicians in the classroom: How their practice has potential to foster student horizon. In M. Goos & K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspectives and Challenges.* Springer International Publishing.

Mali, A., & Petropoulou, G. (2017). Characterising undergraduate mathematics teaching across settings and countries: An analytical framework. *Nordic Studies in Mathematics Education, 22*(4), 23-42.

Misfeldt, M. & Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians' practices in selecting mathematical problems. *Educational Studies of Mathematics, 89*(3), 357–

373.

Petropoulou, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2011). Inquiring mathematics teaching at the university level. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. *3*, pp. 386-392). Ankara, Turkey: PME.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(4), 263-281.

Πετροπούλου, Γ. (2018). *Η διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο* (Διδακτορική διατριβή). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Πετροπούλου, Γ., Ζαχαριάδης, Θ., & Πόταρη, Δ. (2014). Διερευνώντας τη Διδασκαλία των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο: η Αλληλεπίδραση Διδάσκοντος και Φοιτητών. Στα, Τζεκάκη Μ. (επιμέλεια), *Πρακτικά του 5^ου^ Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*. Φλώρινα.