Η ΕΤΟΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΑΠΟ ΜΙΑ «ΔΥΣΚΟΛΗ» ΕΡΩΤΗΣΗ

Ιωάννης Κανέλλος[1,2], Έλενα Ναρδή[1], Ειρήνη Μπιζά[1]

[1]University of East Anglia, [2]Περιφερειακό Κέντρο Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού Κρήτης

I.Kanellos@uea.ac.uk, E.Nardi@uea.ac.uk, I.Biza@uea.ac.uk

Η παρούσα εργασία εκθέτει μερικά αποτελέσματα από την έρευνά μας με αντικείμενο το πώς προσλαμβάνουν οι μαθητές Γυμνασίου την Μαθηματική Απόδειξη όταν τη συναντούν πρώτη φορά (Kanellos, 2014 και Kanellos, Nardi, & Biza, 2018). Παρουσιάζονται ενδεικτικά παραδείγματα από τις απαντήσεις 85 μαθητών Γυμνασίου, σε μια ερώτηση με δύο σκέλη. Το πρώτο απαιτεί τη γνώση μιας μορφής απόδειξης που οι μαθητές είχαν διδαχθεί αναλυτικά. Το δεύτερο απαιτεί καλή γνώση εννοιών και ικανότητα ανάγνωσης γεωμετρικών σχημάτων. Εργαλείο ανάλυσης είναι η επεκτεταμένη ταξινομία των Harel & Sowder και τα αποτελέσματα ανοίγουν συζήτηση σχετικά με το πότε και το πώς της διδασκαλίας της Μαθηματικής Απόδειξης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΤΟ ΠΟΤΕ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Είναι ευρέως αποδεκτό ότι Μαθηματικά έχουμε, ως υπόσταση και περιεχόμενο, όταν υπερβαίνουμε τα όρια της Αριθμητικής και της τυποποιημένης Γεωμετρίας και θέτουμε ερωτήματα που αφορούν στις ιδιότητες αριθμών και σχημάτων και αναζητούμε συγκροτημένες απαντήσεις· δηλαδή από την ώρα που θεμελιώνουμε την απόδειξη και την αποδεικτική διαδικασία. Ακριβώς αυτό το σημείο καμπής συναντάται στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα όταν, μετά την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και την είσοδο στη Δευτεροβάθμια, αρχίζει να υπονοείται και κατόπιν να διδάσκεται η Μαθηματική Απόδειξη (εφεξής ΜΑ). Πότε όμως θα πρέπει άραγε να εκθέτουμε τα παιδιά στην «κρυφή γοητεία» της ΜΑ; Στην παρούσα εργασία κάνουμε απόπειρα να συνεισφέρουμε στο άνοιγμα μιας συζήτησης πάνω στο θεμελιώδες αυτό ερώτημα, από παιδαγωγική και διδακτική άποψη, αξιοποιώντας υλικό από την ερευνητική μας εργασία. Το υλικό αυτό αναλύθηκε με εργαλείο την ταξινομία αποδεικτικών σχημάτων Harel & Sowder και έδωσε παράλληλα ως ερευνητικό εύρημα την επέκταση της ταξινομίας . Η συλλογή του υλικού έλαβε χώρα στα πλαίσια της ερευνητικής μας δουλειάς που συνεχίζεται με στόχο την εμβάθυνση στα δημοσιευμένα δεδομένα με προοπτική την επεξεργασία και την κοινοποίηση των αδημοσίευτων, ακόμη, πλευρών της έρευνάς μας.

ΤΑΞΙΝΟΜΙΑ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ HAREL & SOWDER

Η ταξινομία των Harel & Sowder που χρησιμοποιήσαμε στην έρευνά μας δημοσιοποιείται από τους δημιουργούς της και λαμβάνει μια τελική μορφή μέσα σε μια δεκαετία περίπου (1998, 2007). Θα περιγράψουμε συνοπτικά την ταξινομία σε ό,τι ακολουθεί. Οι ερευνητές αυτοί, αφού όρισαν το αποδεικτικό σχήμα ως μια διαδοχή συλλογισμών η οποία «αποτελεί στοιχείο εξακρίβωσης και πιστοποίησης» (Harel & Sowder, 2007, σελ. 809), διακρίνουν τις ακόλουθες τρεις κατηγορίες αποδεικτικών σχημάτων όπως αυτά αναδύθηκαν μέσα από τις αποδεικτικές απόπειρες των φοιτητών τους:

- Κατηγορία Αποδεικτικών σχημάτων *Εξωτερικής Πεποίθησης* (*External Conviction=EC*) που περιλαμβάνει: το Αποδεικτικό σχήμα *Αυθεντίας (Authoritarian)=EC.A),* που στηρίζεται στο κύρος μιας αυθεντίας (π.χ. καθηγητής, βιβλίο κλπ)· το Αποδεικτικό σχήμα *Τελετουργίας* (*Ritual=EC.R*) που θεωρεί ότι η μορφή μιας απόδειξης (το τελετουργικό κομμάτι) είναι η βασική ένδειξη της αλήθειάς της· και το Αποδεικτικό σχήμα *Μη Αναφορικό* (*Non Referential Symbolic=EC.NRS*), το οποίο περιλαμβάνει αυθαιρεσίες κατά τη χρήση μαθηματικών συμβόλων, ορισμών, θεωρημάτων κλπ.
- Κατηγορία Αποδεικτικών σχημάτων που καλούνται *Εμπειρικά* (*Empirical=E*) και περιλαμβάνει: το *Επαγωγικό* (*Inductive=EI*) αποδεικτικό σχήμα το οποίο κατά κανόνα σε ειδικές περιπτώσεις των οποίων την ισχύ γενικεύει αβάσιμα και το *Αντιληπτικό* (*Perceptive=EP)* σχήμα που στηρίζεται σε αυθαίρετες αντιλήψεις είτε πρόκειται για ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων είτε αλγεβρικών παραστάσεων.
- Τέλος, η κατηγορία με αποδεικτικά σχήματα που καλούνται *Παραγωγικά* (*Deductive=D*) και περιλαμβάνει: το *Μετασχηματιστικό* αποδεικτικό σχήμα (*Transformational=DT*) καθώς και το *Αξιωματικό* (*Axiomatic=DA*). Η διαφορά των δυο σχημάτων έγκειται μεταξύ άλλων και στο ότι τα σχήματα *DA* έχουν ενσωματώσει την αντίληψη της φορμαλιστικής αξιωματικής θεμελίωσης.

Θεωρήθηκε ότι ο χαρακτηρισμός ενός σχήματος ως *DA*, ο οποίος άλλωστε συμπίπτει με τη συνήθη αντίληψη όσων αναπτύσσουν ή διδάσκουν την επιστήμη των Μαθηματικών για το τι είναι ΜΑ, δεν άρμοζε σε καμιά από τις αποδείξεις που δόθηκαν κατά τη συλλογή στοιχείων της έρευνάς μας. Για αυτό και επικεντρωνόμαστε, από την τρίτη κατηγορία, μόνο στο σχήμα *DT*.

Η ΕΠΕΚΤΕΤΑΜΕΝΗ ΤΑΞΙΝΟΜΙΑ HAREL & SOWDER

Η έρευνά μας, πέρα από την ποιοτικού χαρακτήρα διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο προσλαμβάνουν τα παιδιά τη ΜΑ κατά την πρώτη επαφή με αυτήν, περιέχει και τη συμβολή στην επέκταση της ταξινομίας (ibid. 2018). Συγκεκριμένα είχε αναφερθεί σε προηγούμενες έρευνες (Housman & Porter, 2003), ότι το ίδιο άτομο μπορεί και να δώσει αποδείξεις διαφορετικής κατηγορίας, σε <u>διαφορετικές</u> ερωτήσεις. Τα δεδομένα της δικής μας έρευνας κατά τη μεθοδική ανάλυσή τους αποκάλυψαν ένα πιο σύνθετο φαινόμενο. <u>Το ίδιο άτομο στην ίδια ερώτηση</u> παρουσίαζε στοιχεία δύο, τουλάχιστον, αποδεικτικών σχημάτων διαφορετικών κατηγοριών ή από την ίδια κατηγορία. Λίγο αργότερα από εμάς, μια άλλη ερευνητική δουλειά καταλήγει σε παρόμοιο συμπέρασμα (Lee, 2016).

Φαίνεται λοιπόν ότι η ταξινομία των Harel & Sowder είναι ένα αναλυτικό εργαλείο για την προσέγγιση και αποτύπωση του τρόπου που προσλαμβάνουν την απόδειξη οι διδασκόμενοι και αυτό ανεξάρτητα τόσο από το πολιτισμικό, κοινωνικοπολιτικό περιβάλλον μέσα στο οποίο αυτοί δρουν όσο και από το επίπεδο της εκπαίδευσης στο οποίο βρίσκονται. Πράγματι η ταξινομία γεννήθηκε από τη μελέτη των αποδεικτικών σχημάτων που εμφανίζονται στις αποδεικτικές προσπάθειες φοιτητών της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στις ΗΠΑ ενώ εμείς μελετήσαμε αποδεικτικές προσπάθειες στην κατώτερη μέση ελληνική εκπαίδευση (Γ΄ Γυμνασίου). Το γεγονός ότι η ταξινομία των Harel & Sowder λειτουργεί και στα δυο πλαίσια τόσο διαφορετικών κόσμων μάλλον φαίνεται να ενισχύει την άποψη ότι διαθέτει μεγάλο αναλυτικό βεληνεκές.

Πέραν τούτου φαίνεται ακόμη, όπως ειπώθηκε προηγουμένως, ότι είναι επεκτάσιμη με την αποδοχή μικτών αποδεικτικών σχημάτων. Για παράδειγμα, εντοπίσαμε αποδεικτικά σχήματα του τύπου DT-EC.NRS, EP- EC.NRS, κ.λ.π.. Τα μικτά αποδεικτικά σχήματα θα γίνουν ακόμη πιο κατανοητά με τα συγκεκριμένα παραδείγματα που θα δοθούν στη συνέχεια. Το σπουδαιότερο όμως είναι πως, με την αποτύπωση των αποδεικτικών σχημάτων, μπορούμε να διερευνήσουμε την ετοιμότητα των διδασκομένων για ΜΑ παρατηρώντας τις προσπάθειές τους από μια οπτική γωνία ποιοτικής ανάλυσης που ενδεχομένως να ανοίξει το δρόμο για βαθύτερη κατανόηση των σχετικών με τη ΜΑ νοητικών διαδικασιών και ίσως και άλλων παραγόντων είτε συγκυριακών είτε συστημικού χαρακτήρα όπως είναι π.χ. ο ρόλος του διδάσκοντος, του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών κ.λπ..

ΠΛΑΙΣΙΟ, ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ & ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό σύστημα η ΜΑ διδάσκεται για πρώτη φορά στην Γ΄ Γυμνασίου τόσο στην Άλγεβρα όσο και στη Γεωμετρία. Στην Άλγεβρα σχετίζεται π.χ. με ταυτότητες ενώ στη Γεωμετρία π.χ. με την ισότητα τριγώνων κ.α. (Αργυράκης, Βουργανάς, Μεντής, Τσικοπούλου, & Χρυσοβέργης, 2010). Με αυτό το δεδομένο επιλέχθηκε ένα Γυμνάσιο για να διεξαχθεί η έρευνα. Επρόκειτο για ένα Σχολείο όπου οι επιδόσεις των παιδιών κάλυπταν ένα σχετικά ευρύ φάσμα. Υπήρξε συνεργασία με τους Μαθηματικούς του Σχολείου και διαρκής ανταλλαγή απόψεων. Αναπτύχθηκε στενότερη συνεργασία με τη Μαθηματικό (εφεξής Ι.) που δίδασκε στα τμήματα της Τρίτης Τάξης. Έτσι συγκροτήθηκε το δείγμα της έρευνας το οποίο αριθμεί σε 85 άτομα. Όλες οι διδασκαλίες σε όλα τα τμήματα έγιναν αντικείμενο παρακολούθησης. Υπήρξε επίσης στενή συνεργασία τόσο στο διαγνωστικό Τεστ που δόθηκε στην αρχή της χρονιάς, σε Τεστ ενδιάμεσο όσο και στο Τεστ που δόθηκε στο τέλος της χρονιάς. Από αυτό το τελευταίο προέρχεται και η ερώτηση που αναλύουμε στην παρούσα εργασία. Πρόκειται για τις απαντήσεις στην Ερώτηση 6 του τελικού Τεστ η οποία έχει δυο σκέλη (εφεξής Ε6α & Ε6β, βλέπε Εικ.1). Διευκρινίζεται ότι επιλέξαμε μερικές ασκήσεις να είναι αρκετά δύσκολες για παιδιά που συναντούν για πρώτη φορά την ΜΑ. Η Ε6β ανήκει σε αυτήν την κατηγορία. Θελήσαμε με αυτόν τον τρόπο να αποφύγουμε πολλές «καλές» απαντήσεις που δεν θα αποκάλυπταν το εύρος των μαθησιακών αναγκών των παιδιών. Η επιλογή μας αυτή σε συνδυασμό και με το ότι τα παιδιά γνώριζαν ότι δεν επρόκειτο να συνυπολογισθεί στην αξιολόγησή τους η επίδοσή τους στο Τεστ οδήγησε σε ένα σχετικά υψηλό αριθμό περιπτώσεων όπου δεν καταγράφηκε καμιά απάντηση[1]. Το θεωρήσαμε όμως αυτό προτιμότερο.

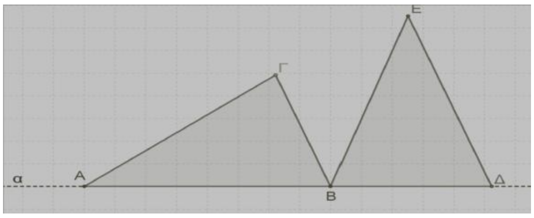
Η ΕΡΩΤΗΣΗ Ε6

Η ερώτηση Ε6 είναι η ακόλουθη:

Στο σχήμα (Εικ. 1), τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΕΒΔ έχουν ΑΓ=ΕΒ, ΑΒ=ΕΔ και ΓΒ=ΒΔ. Τα σημεία Α, Β και Δ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία α.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΕΒΔ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΒ και ΕΔ είναι παράλληλες.



Εικόνα 1. Το σχήμα για την ερώτηση Ε6.

Το σκέλος Ε6α είναι εύκολο υπό την έννοια ότι όταν είναι γνωστά τα κριτήρια ισότητας τριγώνων παρατηρεί κανείς αμέσως ότι τα δεδομένα εκπληρώνουν τις απαιτήσεις του κριτηρίου ισότητας πλευρά-πλευρά-πλευρά. Τα παιδιά είχαν εξασκηθεί επανειλημμένα σε ασκήσεις αυτού του τύπου.

Το σκέλος Ε6β αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολο για τα παιδιά. Αρκεί η απλή παρατήρηση του Πίνακα 1, ο οποίος περιέχει το πλήρες σύνολο των αποδεικτικών σχημάτων των απαντήσεων στα Ε6α και Ε6β, για αυτή τη διαπίστωση:

	E6a	**E6b**
DT	41	4
DT-EP	1	1
DT-EC.NRS	9	11
EP-EC.NRS	4	8
EC.NRS	4	18
NS	26	43
Σύνολο	85	85

ΠΊΝΑΚΑΣ 1: Συχνότητα εμφάνισης αποδεικτικών σχημάτων που ανιχνεύθηκαν στις αποδείξεις των Ε6α και Ε6β.

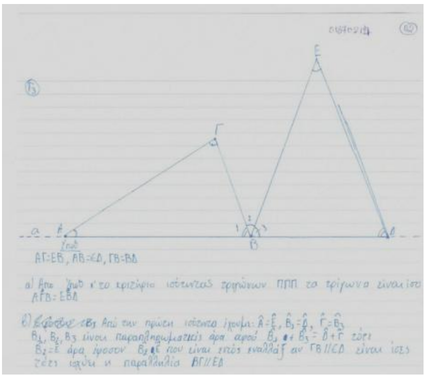
[1] Για τις περιπτώσεις που δεν έχει δοθεί απάντηση σε ένα ερώτημα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό NS=NO SOLUTION.

Ερευνητικά έχει εντοπισθεί προ πολλού χρόνου η διδακτική δυσκολία που σχετίζεται με το διαχωρισμό των εννοιών «παράλληλες ευθείες» αφ' ενός και «γωνίες εντός εναλλάξ» αφ' ετέρου. Το πλέον σύνηθες, και κατά τους Van Hiele (Fuys, Geddes & Tischler, 1988, σελ. 92-93) είναι να έχουν αρκετά παιδιά την εντύπωση ότι η έννοια «εντός εναλλάξ» ταυτίζεται με την έννοια «παράλληλες ευθείες». Στην περίπτωση της Ε6β πρόκειται τόσο για την έννοια «εντός εναλλάξ» όσο και την «εντός εκτός και επί τα αυτά» γωνίες. Συνδυάζεται δε και με τη δυσκολία της κατανόησης της απλής συνεπαγωγής (Harel & Sowder, 2007, σελ. 33). Μάλλον οι δυσκολίες αυτές αναδείχθηκαν στις αποδεικτικές προσπάθειες των παιδιών επειδή φαίνεται ότι δεν είχαν κατορθώσει ακόμη να «διαβάζουν» ορθά, σχήματα όπου υπεισέρχονται οι έννοιες της παραλληλίας και η θέση γωνιών που σχηματίζουν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη.

ΠΑΡΑΘΕΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα στα οποία τα παιδιά επιτυγχάνουν μια DT απόδειξη στην Ε6α σε σύγκριση με διάφορα αποδεικτικά σχήματα που ξεδιπλώνουν απαντώντας στην Ε6β. Η πρόθεσή μας είναι να στραφεί η ερευνητική προσοχή στο γεγονός ότι, παρά τις ελλείψεις που έχουν, οι απόπειρες απόδειξης της Ε6β αποτελούν μαρτυρία ενός εν εξελίξει μαθηματικού λόγου που διαθέτει τη δυναμική να μετασχηματισθεί προς την κατεύθυνση της παραγωγικής σκέψης. Ασφαλώς η διδασκαλία της Ι. έπαιξε σημαντικό ρόλο στο αποτέλεσμα αυτό.

Ο Ρ[37][2] δίνει στην Ε6β απάντηση που χαρακτηρίσαμε DT (Εικ. 2).



Εικόνα 2. Το γραπτό του Ρ[37].

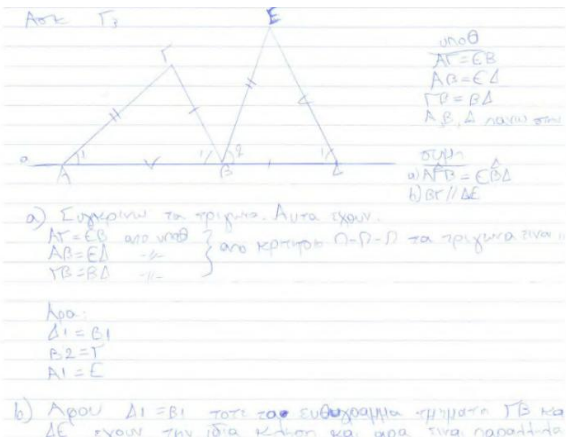
Ο Ρ[37] αξιοποιεί το άθροισμα των γωνιών $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 2$∟[3] αφού τα σημεία Α, Β και Δ βρίσκονται σε μια ευθεία. Από την ισότητα $\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{B}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3$ και τις $\hat{\Delta} = \hat{B}_1$ καθώς και την ιδιότητα της διαγραφής καταλήγει πως $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Η τελευταία ισότητα όμως είναι λογικά ισοδύναμη με την

[2] Ρ[] σημαίνει ένα συμμετέχοντα μαθητή ή μαθήτρια στην έρευνα. Ο αριθμός μέσα στις αγκύλες είναι ο κωδικός του. Για λόγους τεχνικούς κατά την έρευνα οι κωδικοί δεν ταυτίζονται με αύξοντες αριθμούς. Έτσι υπερβαίνον τον αριθμό 85 ενώ σε κάποιες περιπτώσεις δεν είναι διαδοχικοί.

[3] Το σύμβολο ∟ σημαίνει ορθή γωνία.

παραλληλία των ΒΓ και ΔΕ. Παρά το γεγονός ότι έχει ήδη αποδείξει την παραλληλία με την $\angle\Delta = \angle B_1$ η απόδειξή του λαμβάνει τον χαρακτηρισμό DT, αφού περιέχει στοιχεία παραγωγικής σκέψης (αξιοποιεί τα δεδομένα και καταλήγει σε ορθά συμπεράσματα).

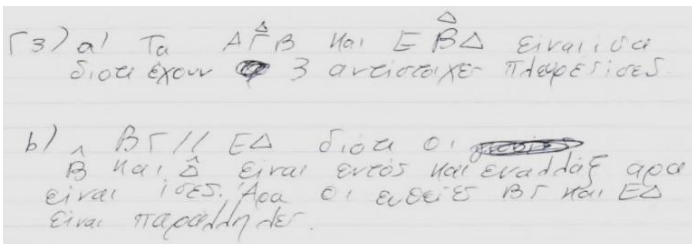
Ο P[64], αντίθετα με τον P[37], παρατηρεί αμέσως ότι η ισότητα των τριγώνων οδηγεί στην ισότητα $\angle\Delta = \angle B_1$ και επομένως δίνει απάντηση στην Ε6β (Εικ. 3) που χαρακτηρίσαμε DT. Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιεί την έννοια της κλίσης. Δεν χρησιμοποιεί την ορολογία των «εντός εναλλάξ», «εντός εκτός επί τα αυτά» κλπ.



Εικόνα 3. Το γραπτό του P[64].

Ο P[64] έχει ήδη κατακτήσει την έννοια της παραλληλίας με βάση την κλίση μιας ευθείας της μορφής ψ=αχ+β. Η σκέψη αυτή φαίνεται βάσιμη διότι η κλίση των ευθειών αυτής της μορφής δηλώνεται σε σχέση με τον άξονα χ΄χ το ρόλο του οποίο στην περίπτωση μας παίζει η ευθεία (α). Ένα άλλο ενδεχόμενο είναι να έχει κατακτήσει την έννοια της κλίσης μέσα από προβλήματα Φυσικής. Σε κάθε περίπτωση φαίνεται να έχει άνεση στη χρήση των όρων.

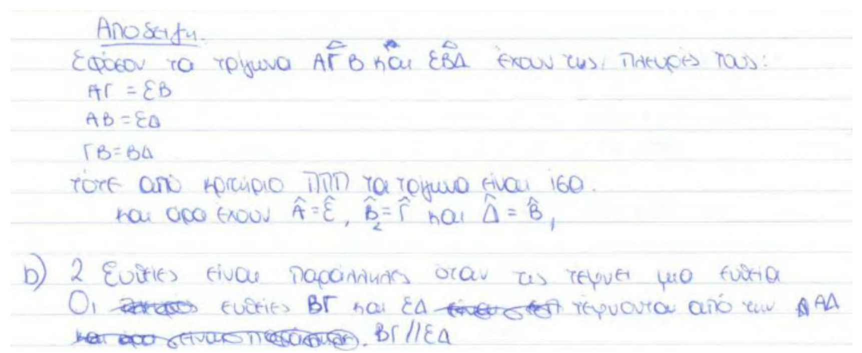
Ο P[36] δίνει απάντηση που χαρακτηρίσαμε DT-EC.NRS στην Ε6β (Εικ. 4).



Εικόνα 4. Το γραπτό του P[36].

Παρατηρούμε ότι η απάντηση στην Ε6β χαρακτηρίζεται από το στυλ μια μαθηματικής πρόζας: ο Ρ[36] έχει συνειδητοποιήσει την ανάγκη επιχειρηματολογίας με δομή «αν, τότε» - εξ' ου αφ' ενός και ο χαρακτηρισμός DT. Αφ' ετέρου δε χαρακτηρίζεται από την εσφαλμένη ταύτιση των εννοιών «εντός εναλλάξ» και «παράλληλες». Επιπλέον, οι γωνίες στις οποίες μάλλον αναφέρεται δεν είναι «εντός εναλλάξ» αλλά «εντός εκτός και επί τα αυτά». Υπάρχει δηλαδή ασάφεια διότι υπάρχουν πάνω από δύο γωνίες με κορυφές Β και Δ. Όταν εμφανίζονται ακατάλληλες ή ασαφείς χρήσεις μαθηματικών όρων και ιδιοτήτων χαρακτηρίζουμε το αποδεικτικό σχήμα ως EC.NRS[4].

Ο Ρ[41] δίνει απάντηση στην Ε6β που χαρακτηρίσαμε EC.NRS. (Εικ. 5).


Απόδειξη.
Εφόσον τα τρίγωνα ΑΓΒ και ΕΒΔ έχουν τις πλευρές τους:
ΑΓ = ΕΒ
ΑΒ = ΕΔ
ΓΒ = ΒΔ
τότε από κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.
και άρα έχουν $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta} = \hat{B}_1$
b) 2 Ευθείες είναι παράλληλες όταν τις τέμνει μια ευθεία
Οι ευθείες ΒΓ και ΕΔ τέμνονται από την ΑΔ
~~και άρα εναλλάξ~~. ΒΓ//ΕΔ

Εικόνα 5. Το γραπτό του Ρ[41].

Απαντώντας στην Ε6α, ο Ρ[41] ακολουθεί με προσήλωση ό,τι έχει διδαχθεί από την Ι.: δεν περιορίζεται στην αναφορά του κριτηρίου ισότητας τριγώνων αλλά προσθέτει και ποιες γωνίες προκύπτουν ίσες. Παρ' όλα αυτά, όταν προσπαθεί να αποδείξει την Ε6β, δίνει απάντηση που θεωρήσαμε κατεξοχήν EC.NRS: διαχειρίζεται την έννοια «δυο ευθείες τέμνονται από τρίτη» ως ταυτόσημη με την έννοια της παραλληλίας. Ίσως να υποβόσκει η σκέψη για ισότητα γωνιών αλλά έτσι όπως διατυπώνεται η παραλληλία φαίνεται να είναι ένας γενικός νόμος ο οποίος ισχύει για κάθε ζεύγος ευθειών που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία. Αυτή ακριβώς η αυθαιρεσία στη χρήση μαθηματικών αντικειμένων είναι που μας οδήγησε στο χαρακτηρισμό EC.NRS.

ΝΑ ΔΙΔΑΣΚΕΤΑΙ Η ΝΑ ΜΗΝ ΔΙΔΑΣΚΕΤΑΙ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΝΩΡΙΣ; ΙΔΟΥ Η ΑΠΟΡΙΑ!

Η βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών βρίθει από συλλογή στοιχείων για σφάλματα, παρανοήσεις, χαμηλές επιδόσεις κ.λπ. των παιδιών απανταχού της Γης (e.g. Hanna & De Villiers, 2012). Θα περίμενε ίσως ο αναγνώστης, ο εξοικειωμένος με αυτό το ρεύμα, μετά τα παραδείγματα που εκθέσαμε, να διατυπώσει τη σκέψη ότι δεν υπάρχει η απαιτούμενη ωριμότητα για να διδαχθεί η απόδειξη νωρίτερα από την Γ΄ Γυμνασίου. Όμως αυτή η σκέψη θα αχρήστευε το

[4] Σημειώνεται ότι στον Διδακτορική Διατριβή ο Κανέλλος είχε αποδώσει μόνο με EC.NRS το αποδεικτικό σχήμα κρίνοντας πιο αυστηρά. Στην αναθεώρηση όπου υπάρχουν αναγνωρίζουμε στοιχεία του αποδεικτικού σχήματος DT ακόμη κι αν δεν ολοκληρώνεται η απόδειξη ως DT.

αναλυτικό μας όπλο, ανάγοντας τα πράγματα στη μανιχαϊστική διχοτομική εκδοχή του « σωστό»-«λάθος» με επόμενο βήμα την εξαφάνιση από το οπτικό πεδίο των ενδιάμεσων και εν πολλοίς μεταβατικών καταστάσεων μεταξύ μη αποδεικτικού και αποδεικτικού λόγου. Το μεγάλο πλεονέκτημα όμως της ταξινομίας, τόσο στην αρχική της εκδοχή των Harel & Sowder (2007), όσο και στην επεκτεταμένη που έχουμε προτείνει εμείς (ibid., 2018), πολύ περισσότερο συλλαμβάνει τη δυναμική εξέλιξη προς τη ΜΑ. Για το λόγο αυτό, εμείς υποστηρίζουμε το εξής: όσο νωρίτερα εκτίθενται τα παιδιά σε εργαλεία όπως η ΜΑ, τόσο πιο καλά θα τα αφομοιώσουν εφόσον αυτά προσφέρονται σε κατάλληλη μορφή. Ισχύει δηλαδή αυτό που υποστηρίζει η Sfard (2000, σελ. 36): Αν δε μιλάς στα παιδιά όσο το δυνατό συχνότερα με σωστά Μαθηματικά μην περιμένεις και πολλά αποτελέσματα. Η ΜΑ είναι ένα από τα σπουδαιότερα αντικείμενα διδασκαλίας που θα έπρεπε τα παιδιά κατά τη λογική Sfard να έρχονται σε επαφή. Φυσικά η άποψη αυτή για να εφαρμοσθεί θα πρέπει να συνοδεύεται από τροποποιήσεις στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών αλλά και, κυρίως, στον τρόπο διδασκαλίας (Dehaene, 2010, σελ. 156). Ακόμη θα ήταν ευχής έργο να κατανοήσουμε την πρόκληση των Μαθηματικών που οφείλεται στην ίδια τη φύση της γένεσής τους, όπως παρατηρεί ο Dehaene (2010, σελ. 98) αλλά και στη φύση του ανθρωπίνου εγκεφάλου (Dehaene, 2010, σελ. 157). Μέσα από την ερευνητική μας προσπάθεια κατανοούμε την ιδιάζουσα πρόκληση της ΜΑ για τους μαθητές αλλά ταυτόχρονα μαθαίνουμε να μην εκμηδενίζουμε και υποτιμούμε την ενδιάμεση εξέλιξη από τη μη γνώση στη γνώση. Ας λάβουμε υπόψη μας ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος δέχεται ένα καταιγιστικό brain storming στο γλωσσικό επίπεδο επί ενάμιση με δυο χρόνια ώσπου να αρθρώσει το νήπιο που τον διαθέτει κάποιες κουβέντες κακήν-κακώς. Στην περίπτωση των νηπίων πανηγυρίζουμε. Γιατί λοιπόν να μην ενθουσιαζόμαστε για την ανάλογη περίσταση όταν ο εφηβικός εγκέφαλος ψελλίζει τις πρώτες του «αποδεικτικές» φράσεις;!

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε θερμά την Εκπαιδευτικό, τα παιδιά της Γ΄ Τάξης, τον Διευθυντή του Σχολείου και όλους τους Συναδέλφους του Συλλόγου Διδασκόντων που αγκάλιασαν την παρουσία μας από την πρώτη στιγμή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αργυράκης, Δ., Βουργανάς, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2010). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*: ΟΕΔΒ.

Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths*: Odil Jacob.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents*. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 3(Monograph).

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte, NC: IAP.

Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof Schemes and Learning Strategies of Above-Average Mathematics Students *Educational Studies in Mathematics, 53* (2), 139-158

Kanellos, I. (2014). *Secondary students' proof schemes during the first encounters with formal mathematical reasoning: Appreciation, fluency and readiness* (Doctoral thesis), UEA, Retrieved from https://ueaeprints.uea.ac.uk/49759/1/2014KanellosIEdD.pdf

Kanellos, I., Nardi, E., & Biza, I. (2018). Proof schemes combined: mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof. *Mathematical Teaching and Learning 20*(4), 277-294.

Lee, K. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. *Journal of Mathematical Behavior 41*, 26–44.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning 2(3),* 157-189.