Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Στο στρογγυλό τραπέζι συμμετέχουν:

***Ειρήνη Μπιζά, **Ιωάννης Παπαδόπουλος, ***Δέσποινα Πόταρη, ****Χαράλαμπος Σακονίδης**

*University of East Anglia, **Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, *** Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, **** Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

I.Biza@uea.ac.uk, ypapadop@eled.auth.gr, dpotari@math.uoa.gr,

xsakonid@eled.duth.gr

Συντονιστής:

Γιώργος Ψυχάρης

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών G.Psycharis@math.uoa.gr

Η μαθηματική πρόκληση στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί κεντρικό στόχο πολλών εκπαιδευτικών συστημάτων και Αναλυτικών Προγραμμάτων, ενώ γίνεται προσπάθεια να ενσωματωθούν κατάλληλες δραστηριότητες σε σχολικά εγχειρίδια και να επιμορφωθούν οι εκπαιδευτικοί σε προγράμματα επαγγελματικής εκπαίδευσης. Ωστόσο, η έρευνα και η εμπειρία δείχνουν ότι οι παραπάνω συνθήκες δεν αποτελούν εγγύηση για την δημιουργία πλούσιων μαθησιακών περιβαλλόντων που ενεργοποιούν όλους τους μαθητές στη σχολική τάξη. Σε αυτό το στρογγυλό τραπέζι εστιαζόμαστε στη μαθηματική πρόκληση ως συστατικό στοιχείο της διδασκαλίας των μαθηματικών και της μαθησιακής εμπειρίας των διδασκομένων με στόχο να εξετάσουμε ζητήματα που αναδύονται στο επίπεδο της έρευνας και της πρακτικής στη διεθνή αλλά και στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην αφετηρία μας βρίσκονται σημαντικά ερευνητικά ευρήματα από πολλές έρευνες αναφορικά με την αξιοποίηση γνωστικά απαιτητικών δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών και της συνεισφοράς τους τόσο στην υποστήριξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών και την βελτίωση της μαθησιακής τους εμπειρίας (π.χ. Stein, Remillard, & Smith, 2007) όσο και στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών (Sullivan et al., 2015). Στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών, παρότι για πολλά χρόνια ο όρος μαθηματική πρόκληση αναφερόταν στην εκπαίδευση των ταλαντούχων μαθητών, τις τελευταίες δύο δεκαετίες χρησιμοποιείται για να περιγραφούν τρόποι ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των μαθητών σε οποιαδήποτε σχολική τάξη (Barbeau & Taylor, 2009) μέσα από τη σύνδεση της μαθηματικής εκπαίδευσης με την έρευνα στα μαθηματικά (Applebaum & Leikin, 2014). Η Leikin (2009) ορίζει τη μαθηματική πρόκληση ως μια «ενδιαφέρουσα δυσκολία» η οποία κινητοποιεί τους μαθητευόμενους να προσπαθήσουν να την ξεπεράσουν ανάλογα με την ατομική εμπειρία τους στην επίλυση προβλημάτων. Σε μια σειρά θεωρητικών πλαισίων της διδακτικής των μαθηματικών η μαθηματική πρόκληση θεωρείται ως συστατικό στοιχείο της εκπαιδευτικής διαδικασίας που σχετίζεται ευθέως με την παροχή ευκαιριών για μάθηση στους μαθητές και την ποιότητα της διδασκαλίας. Για παράδειγμα, ο Brousseau (1997), θεμελιώνοντας τη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων, επισημαίνει ότι ο κύριος ρόλος του εκπαιδευτικού είναι η μεταβίβαση (devolution) της ευθύνης επίλυσης ενός καλού – με την έννοια του προκλητικού – προβλήματος στον μαθητή. Οι Potari και Jaworski (2002) βλέπουν τη μαθηματική πρόκληση ως ένα από τα τρία κεντρικά στοιχεία της διδασκαλίας μαζί με την ευαισθητοποίηση προς τους μαθητές και τη διδακτική διαχείριση. Οι Yackel και Cobb (1996) αναδεικνύουν τη σημασία των κοινωνικών και κοινωνικο-μαθηματικών νορμών στη μαθηματική επικοινωνία στην τάξη και τη δυνατότητα πρόσβασης όλων των μαθητών στο μαθηματικό νόημα.

Η πρόσφατη έρευνα γύρω από την μαθηματική πρόκληση φέρνει στο φως δυσκολίες και διλήμματα που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί στην υποστήριξη της εφαρμογής δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση στην τάξη. Μελετώντας τα διαφορετικά στάδια εξέλιξης μιας μαθηματικής δραστηριότητας πριν και κατά την εφαρμογή της στην τάξη, οι Stein et al. (2009) συσχετίζουν το αν η μαθηματική πρόκληση διατηρείται, ενδυναμώνεται ή αποδυναμώνεται κατά την εξέλιξη της διδασκαλίας με μια σειρά από διαφορετικούς παράγοντες που περιλαμβάνουν: τις νόρμες της τάξης, τις υποθέσεις της δραστηριότητας, τις διδακτικές ρυθμίσεις του εκπαιδευτικού και τις διαθέσεις των μαθητών. Ταυτόχρονα ερευνητικά ευρήματα τεκμηριώνουν τα οφέλη του συνόλου των μαθητών όταν η διδασκαλία βασίζεται σε δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση (Boaler, 2002).

Στο φως των παραπάνω ευρημάτων, η προβληματική που αναπτύσσεται τα τελευταία στον ερευνητικό χώρο θέτει ζητήματα πρόσβασης στη μαθηματική πρόκληση για το σύνολο των μαθητών της τάξης, φέρνοντας εγγύτερα την ανάγκη διερεύνησης της μαθηματικής πρόκλησης σε σχέση με τις διαφορετικές ανάγκες όλων των μαθητών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το πρόγραμμα EDUCATE [1] που στοχεύει στον εντοπισμό και τη διερεύνηση των προκλήσεων που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί στην προσπάθειά τους να εργαστούν με γνωστικά απαιτητικές δραστηριότητες και να εφαρμόσουν διαφοροποιημένη διδασκαλία.

Στο παρόν στρογγυλό τραπέζι λαμβάνοντας υπόψη τα υπάρχοντα ερευνητικά δεδομένα αλλά και τα σημεία εστίασης της σύγχρονης έρευνας εστιάζουμε σε μια σειρά από πολυδιάστατα ζητήματα της διδακτικής των μαθηματικών με τα οποία συνδέεται η μαθηματική πρόκληση. Αυτά είναι: (1) η φύση των δραστηριοτήτων και των πόρων (πηγών και διδακτικών υλικών) που μπορούν να στηρίξουν τη μαθηματική πρόκληση, (2) οι κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές πτυχές που διέπουν την εισαγωγή της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη, (3) οι πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης που μπορούν να υποστηρίξουν τους εκπαιδευτικούς στον σχεδιασμό και τη διδακτική διαχείριση καταστάσεων μαθηματικής πρόκλησης ώστε να συναντήσουν τις διαφορετικές ανάγκες των μαθητών, και (4) ο μετασχηματισμός της μαθηματικής γνώσης σε μαθηματική πρόκληση κατά τη μετάβαση των μελλοντικών εκπαιδευτικών από το πανεπιστήμιο στη σχολική τάξη.

Μέσα από τις θεωρήσεις των τεσσάρων εισηγήσεων υιοθετούμε μια περισσότερο ολιστική προσέγγιση της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη και την εκπαίδευση εκπαιδευτικών συνδυάζοντας θεωρητικά δομήματα και μεθοδολογικά εργαλεία από διαφορετικές περιοχές έρευνας όπως η διερευνητική δραστηριότητα, οι συμπεριληπτικές και οι πολιτισμικά υποστηριζόμενες διδακτικές πρακτικές, η ισότητα και η κοινωνική δικαιοσύνη, ο Μαθηματικός Ορίζοντας, η μελέτη βιντεοσκοπημένων διδασκαλιών από ομάδες εκπαιδευτικών (video-clubs). Στο επίπεδο του σχεδιασμού δραστηριοτήτων αναρωτιόμαστε, π.χ., ποια είναι τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση και πώς η μαθηματική πρόκληση σχετίζεται με τη δημιουργική μαθηματική σκέψη; Στο επίπεδο της διδασκαλίας διερευνούμε τις κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παραμέτρους που καθορίζουν τις δυνατότητες συμπερίληψης όλων των μαθητών στη μαθηματική πρόκληση. Στο επίπεδο της εκπαίδευσης (εν ενεργεία και μελλοντικών) εκπαιδευτικών διερευνούμε ερωτήματα όπως: πώς οι εκπαιδευτικοί κατανοούν τη μαθηματική πρόκληση και τη διαφορετικότητα των μαθητών; ποιες πρακτικές αναπτύσσουν για να φέρουν τη μαθηματική πρόκληση κοντά στις ανάγκες των μαθητών; πόσο σημαντική είναι η μαθηματική πρόκληση στο πανεπιστήμιο για την προετοιμασία των μελλοντικών εκπαιδευτικών και πώς το πανεπιστήμιο μπορεί να τους προετοιμάσει για να διδάξουν σε μία τάξη μαθηματικής πρόκλησης;

Οι τέσσερις ενότητες που ακολουθούν εστιάζονται σε ένα από τα τέσσερα ζητήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ο Γιάννης Παπαδόπουλος επιμελήθηκε το πρώτο (δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση), ο Χαράλαμπος Σακονίδης το δεύτερο (η μαθηματική πρόκληση στη σχολική τάξη), η Δέσποινα Πόταρη το τρίτο (η μαθηματική πρόκληση στην εκπαίδευση των εν ενεργεία εκπαιδευτικών) και η Ειρήνη Μπιζά το τέταρτο (η μαθηματική πρόκληση στην εκπαίδευση των μελλοντικών εκπαιδευτικών στο πανεπιστήμιο).

ΕΙΣΗΓΗΣΗ 1: ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΩΣ ΟΧΗΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Η κατάλληλη επιλογή και χρήση δραστηριοτήτων στην τάξη των μαθηματικών είναι κεντρικής σημασίας για την αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών. Ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών συνιστούν την εμπλοκή των μαθητών μέσω της αξιοποίησης δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση γιατί αυτές βοηθούν τους μαθητές στην καλύτερη κατανόηση του τί είναι και πώς αναπτύσσονται τα μαθηματικά (Sullivan, Clarke & Clarke, 2013).

Όμως τί είναι οι δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση; Οι ορισμοί που κατά καιρούς έχουν δοθεί συγκλίνουν: Δραστηριότητες για τις οποίες ο μαθητής δεν έχει αρχικά επίγνωση κάποιων αλγοριθμικών εργαλείων που θα του επιτρέψουν να φτάσει στη λύση και κατά συνέπεια πρέπει ο ίδιος για το σκοπό αυτό να επινοήσει τις απαραίτητες μαθηματικές ενέργειες. Ταυτόχρονα, ο εκπαιδευτικός δεν παρέχει σαφή καθοδήγηση σχετικά με το πώς θα έπρεπε να λυθεί το πρόβλημα ή κατά πόσο η λύση που αναπτύσσεται από το μαθητή είναι σωστή ή όχι - κάτι που αφήνεται στους μαθητές (Sullivan, Clarke & Clarke, 2013). Επιπλέον, η δραστηριότητα αυτή είναι ενδιαφέρουσα και διασκεδαστική ίσως, όμως δεν λύνεται τόσο εύκολα

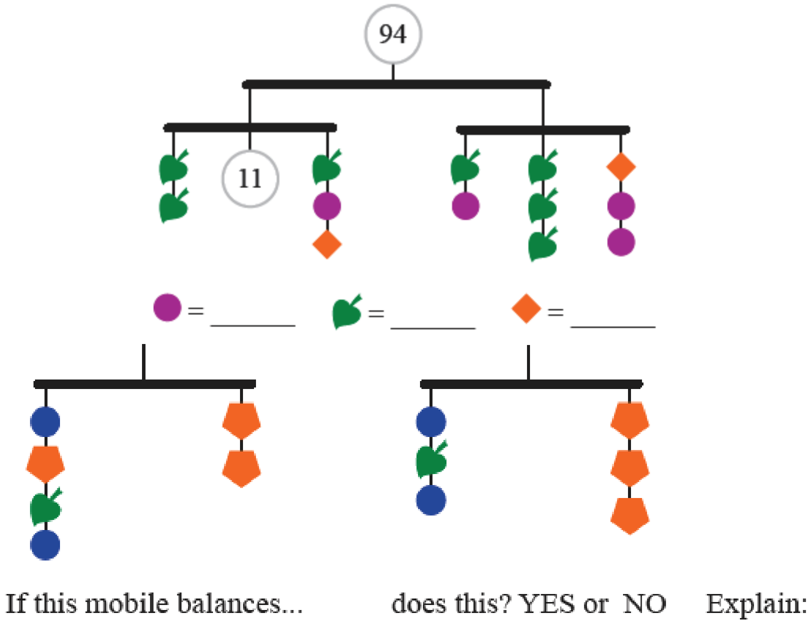
(Goldenberg et al., 2015), αναπτύσσοντας μαθηματική περιέργεια και παρακινώντας τους μαθητές να επιμένουν και να μην παραιτούνται πριν την ολοκλήρωση της δραστηριότητας (Guberman & Leikin, 2013). Βέβαια το κατά πόσο μια τέτοια δραστηριότητα κομίζει ή όχι μαθηματική πρόκληση εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη μαθηματική εμπειρία του κάθε μαθητή.

Οι ίδιοι οι μαθητές θεωρούν «δραστηριότητα με μαθηματική πρόκληση» αυτήν που ενέχει το στοιχείο της δυσκολίας στην επίλυση, της εξυπνάδας στο σχεδιασμό που μπορεί να σε ξεγελάσει, της ανάγκης να εξηγεί ο λύτης τι κάνει (Sullivan, Clarke & Clarke, 2013).

Η βιβλιογραφία κάνει διάκριση σε διαφορετικούς τύπους δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση (Powell et al., 2009) κάποιοι από τους οποίους είναι σχετικοί με χρήση παράδοξων, χρήση προτάσεων που αντιβαίνουν στη διαίσθηση, μοτίβα και ακολουθίες, γεωμετρία, συνδυαστική και πιθανότητες, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι εδώ εξαντλείται ο κατάλογος των διαφόρων τύπων. Βέβαια, αυτή η κατηγοριοποίηση συνδέεται κυρίως με το μαθηματικό περιεχόμενο και γι αυτό ίσως θα είχε ενδιαφέρον να παρουσιαστούν τύποι δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση στη βάση της πρόθεσής τους και οι οποίες μπορεί να λαμβάνουν χώρα είτε στο παραδοσιακό περιβάλλον χαρτί-μολύβι είτε σε ένα ψηφιακό περιβάλλον όπως πχ τα videogames. Εδώ θα παρουσιαστούν τρεις τέτοιες περιπτώσεις. Δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση που (1) εμπλέκουν τους μαθητές σε ενέργειες δημιουργίας μαθηματικού νοήματος, (2) διευκολύνουν το συστηματικό πειραματισμό και σχετίζονται με την ανάπτυξη στρατηγικών, και (3) προωθούν την δημιουργική μαθηματική σκέψη.

Υποστηρίζοντας τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος

Τα mobile puzzles είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση στην τάξη που υποστηρίζει τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος από μέρους των μαθητών (Papadopoulos, 2019).



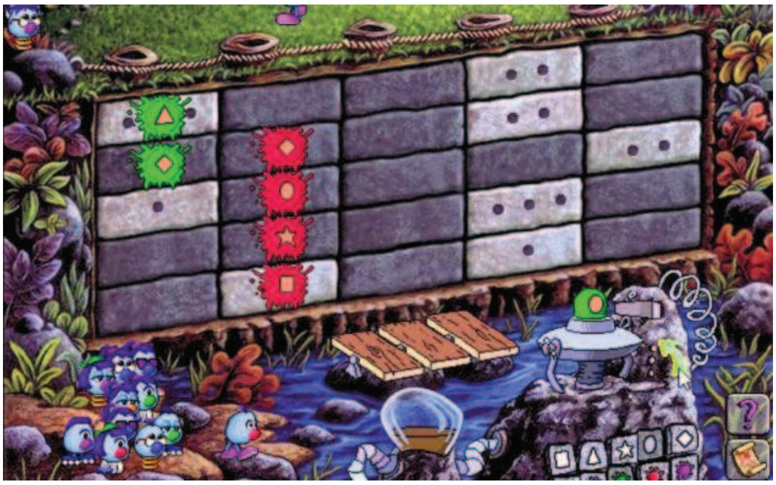
Εικόνα 1: Παραδείγματα δραστηριοτήτων mobile puzzle

Πρόκειται για μια συλλογή πολλαπλών αντικειμένων σε ισορροπία. Οι οριζόντιες ράβδοι είναι πάντα κρεμασμένες με σύρμα στο μέσο τους και έτσι τα δύο άκρα της ράβδου έχουν το ίδιο βάρος. Οι ράβδοι και το σύρμα δεν έχουν βάρος, τα ίδια σχήματα έχουν το ίδιο βάρος και διαφορετικά σχήματα μπορεί να έχουν το ίδιο ή διαφορετικό βάρος. Ο λύτης πρέπει να προσδιορίσει τα άγνωστα βάρη. Οι δραστηριότητες αυτές εστιάζουν στην ισότητα παραστάσεων και οι μαθητές κάνουν χρήση της φαντασίας τους για να δομήσουν τη λογική της «ισορροπίας» των εξισώσεων ενώ την ίδια στιγμή δεν χρειάζονται κανόνες για να λύσουν την εξίσωση (Εικ.1, πάνω). Σε άλλες περιπτώσεις ο λύτης καλείται να αποφασίσει κατά πόσο κάποιο mobile ισορροπεί (πάντα, μερικές φορές, ποτέ) στη βάση δοσμένης πληροφορίας και να τεκμηριώσει την απάντησή του (Εικ. 1, κάτω). Οι γρίφοι αυτοί στην ουσία δεν είναι παρά συστήματα εξισώσεων και οι μαθητές δεν χρειάζεται να απομνημονεύσουν καμία σειρά βημάτων για την επίλυση του συστήματος. Αντ' αυτού, επινοούν άτυπες μεθόδους ισοδύναμες με τον φορμαλιστικό χειρισμό που επιβάλλει η άλγεβρα (Goldenberg, 2019)

Ο μαθητής στην προσπάθεια να βρει το άγνωστο βάρος προβαίνει σε μια σειρά ενεργειών και στην ουσία αυτό που αργότερα θα του διδαχθεί επισήμως ως ιδιότητες της πρόσθεσης, ή ως βήματα για την επίλυση μιας εξίσωσης (η ενός συστήματος εξισώσεων) φαίνεται να ξεκινά από τώρα ως μια διαισθητική αντίληψη της διατήρησης της ισορροπίας. Η αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τα δύο μέρη μιας ισότητας, η απομόνωση μιας μεταβλητής, η αντικατάσταση μιας ποσότητας με ισοδύναμή της, οι ιδιότητες της ισότητας και των πράξεων (ανακλαστική, αντιμεταθετική, προσεταιριστική), είναι μερικές από τις μη τυπικές ενέργειες που επινοούν οι μαθητές πριν ακόμη τις διδαχθούν τυπικά. Πράγματι, μπορούν να δημιουργήσουν εξισώσεις μεταφράζοντας απλά την κατάσταση ισορροπίας, πχ. 2 + =3 . Μπορούν να αφαιρέσουν την ίδια ποσότητα από τα δύο μέλη μιας ισότητας. Στην Εικόνα 1 (κάτω), στο αριστερό mobile η κατάσταση μεταφέρεται σε μορφή εξίσωσης ως 2 + + = 2. Η απομάκρυνση ενός πενταγώνου και από τα μέρη δεν επηρεάζει την ισορροπία και έτσι πετυχαίνεται μια νέα εξίσωση, 2 + =. Αυτή η νέα εξίσωση μπορεί να αντικαταστήσει κάποια άλλη και έτσι να επιτευχθεί πάλι νέα πληροφορία. Όντως, αν αντικατασταθεί η εξίσωση αυτή στο δεξί mobile της ίδιας δραστηριότητας προκύπτει η σχέση 1=3 κάτι που θα καθιστά προφανή την αρνητική απάντηση στη συγκεκριμένη δραστηριότητα (1 πεντάγωνο δεν μπορεί να έχει το ίδιο βάρος με 3 πεντάγωνα – αν εξαιρέσει κανείς την περίπτωση που το βάρος του πενταγώνου είναι μηδέν).

Υποστηρίζοντας το συστηματικό πειραματισμό και την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης

Το παράδειγμα για αυτόν τον τύπο δραστηριότητας με μαθηματική πρόκληση αντλείται από το χώρο των Ψηφιακών Τεχνολογιών και πρόκειται για τα videogames που περιέχουν συλλογές δραστηριοτήτων οι οποίες προκαλούν το μαθητή να διερευνήσει μια κατάσταση. Το παράδειγμα που θα αναφερθεί αξιοποιεί το videogame "The logical journey of Zoombinis" και πιο συγκεκριμένα την πίστα του «The Mudwall puzzle» και σχετίζεται με τη δυνατότητα ανάπτυξης συστηματικού πειραματισμού και στρατηγικών επίλυσης από τη μεριά του μαθητή (Thoma & Biza, in press).



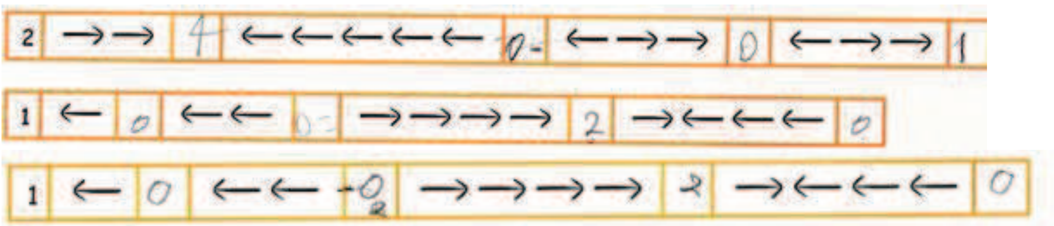
Εικόνα 2: Η πίστα Mudwall puzzle στο videogame Zoombinis

Στη συγκεκριμένη πίστα οι ήρωες εμποδίζονται από έναν τοίχο (πίνακα) 5x5 με κάποια κελιά να διαθέτουν έναν ιδιαίτερο συμβολισμό. Οι ήρωες έχουν στη διάθεσή τους έναν καταπέλτη που πετάει μπάλες στον τοίχο οι οποίες ενσωματώνουν δύο χαρακτηριστικά: ένα χρώμα (μπλε, κόκκινο, κίτρινο, μωβ ή πράσινο) και ένα σχήμα (τετράγωνο, τρίγωνο, αστέρι, κύκλος, ή ρόμβος). Ο πίνακας 5x5 αποτελεί στην ουσία μια μετάθεση των 5 σχημάτων στον ένα άξονα και των 5 χρωμάτων στον άλλο που όμως δεν είναι γνωστά στον λύτη. Κάθε κελί του πίνακα αντιστοιχεί σε έναν μοναδικό συνδυασμό σχήματος και χρώματος. Τέλος υπάρχει μια κρυμμένη ακόμη μετάθεση των δύο αξόνων αφού π.χ. τα χρώματα μπορεί να βρίσκονται είτε στον οριζόντιο είτε στον κατακόρυφο άξονα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα 5! x 5! x 2! = 28800 δυνατούς διαφορετικούς τέτοιους πίνακες. Ο παίκτης πρέπει να κάνει χρήση συγκεκριμένου επιτρεπόμενου αριθμού ρίψεων ώστε να πετύχει τα μαρκαρισμένα κελιά και να προχωρήσει στο παιχνίδι. Αναγκάζεται έτσι σταδιακά μετά από τυχαίες δοκιμές να στραφεί προς έναν συστηματικό πειραματισμό προκειμένου να αναπτύξει στρατηγικές που επιτρέπουν την επιτυχή λύση του προβλήματος σε συγκεκριμένο αριθμό ρίψεων. Ο πειραματισμός αυτός εντοπίζεται στην εξής σειρά βημάτων: (α) Εντόπισε τις μεταβλητές που εμπλέκονται στη λύση (εδώ είναι το χρώμα, το σχήμα), (β) Διατήρησε τη μια μεταβλητή σταθερή και κάνε αλλαγές στην άλλη για να συλλέξεις πληροφορία σχετικά με το πώς συμβάλλει η μεταβλητή αυτή στη λύση του προβλήματος, (γ) κάνε το ίδιο για κάθε μεταβλητή και (δ) χρησιμοποίησε συνδυαστικά αυτήν την πληροφορία αποκλείοντας συγκεκριμένους συνδυασμούς προκειμένου να πετύχεις τον επιθυμητό αριθμό ρίψεων που οδηγεί στη λύση.

Υποστηρίζοντας τη δημιουργική μαθηματική σκέψη

Οι δραστηριότητες με μαθηματική πρόκληση μπορούν να αποτελέσουν επίσης εργαλεία πρόκλησης της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης (Powell et al., 2009). Δραστηριότητες που δημιουργούν έκπληξη προκαλούν στους μαθητές την περιέργεια και την προθυμία να ικανοποιήσουν αυτήν την περιέργεια διερευνώντας έτι περεταίρω όσα διαπραγματεύεται η δραστηριότητα.

Το παράδειγμα που θα αναφερθεί κάνει χρήση ενός περιβάλλοντος που ονομάζεται «Βηματισμός» (Slezáková, Hejný, & Kloboučková, 2012) και αφορά το πώς συμβολίζουν μαθητές δημοτικού τους αρνητικούς αριθμούς (τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής παρουσιάζονται σε σχετική εργασία στο παρόν συνέδριο).



Εικόνα 3: Παραδείγματα που καλλιεργούν τη δημιουργικότητα

Οι μαθητές κινούνται βηματικά με οδηγό τις συλλογές των βελών πάνω σε μια αριθμογραμμή στο πάτωμα με αριθμητικές ενδείξεις μόνο στο θετικό μέρος της και τους ζητείται μετά από κάθε επιμέρους υπολογισμό να συμπληρώσουν στο κενό κουτί την αριθμητική ένδειξη για τη θέση στην οποία βρίσκονται. Στην περίπτωση που καταλήγουν στην περιοχή των αρνητικών αριθμών δημιουργείται η ανάγκη να επινοήσουν έναν τρόπο συμβολισμού που -πολύ σημαντικό- έχει νόημα γι αυτούς. Τα αποτελέσματα δείχνουν να παρακινεί η πρόκληση αυτή δημιουργικές επιλογές που οδηγούν τους μαθητές σε έναν ευφάνταστο δικό τους λειτουργικό συμβολισμό για τους αρνητικούς (Εικ. 3). Αν και ίσως μπορεί κάποιος να πει ότι αυτό δεν είναι «δημιουργικό» με την ευρέως κοινή χρήση του όρου εν τούτοις ο τρόπος που κάθε μαθητής νοηματοδοτεί κάθε λεπτομέρεια της σημειογραφίας του είναι εξαιρετικό στιγμιότυπο αυτού που η βιβλιογραφία αποκαλεί mini-c δημιουργικότητα

(Beghetto & Kaufman, 2009). Επιπλέον αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τη σημειογραφία αυτή με συνέπεια στη συνέχεια στους υπολογισμούς που ακολουθούν και που εμπλέκουν τη χρήση αρνητικών, τους οποίους όμως τυπικά αγνοούν.

ΕΙΣΗΓΗΣΗ 2: ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ 'ΠΡΟΚΛΗΣΗΣ' ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Η πρόσβαση σε υψηλού επιπέδου μαθηματική γνώση και η συνακόλουθη ανάπτυξη ανώτερης μαθηματικής σκέψης αποτελούν δικαίωμα κάθε παιδιού και υποχρέωση κάθε σύγχρονης δημοκρατικής κοινωνίας, η οποία βρίσκεται αντιμέτωπη με την πρόκληση να εξασφαλίσει τα υλικά, τις συνθήκες και το είδος της διδασκαλίας που εγγυώνται αυτήν την εκπαιδευτική λειτουργία. Ωστόσο, η εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματική δραστηριότητα με φιλόδοξους στόχους συχνά εξαντλείται στην προσφορά γνωστικών προκλήσεων που στόχο έχουν να τους προτρέψουν να αναπτύξουν βαθύτερη κατανόηση, ερήμην των διαφορετικών μαθηματικών βιογραφιών και ταυτοτήτων που έχουν συγκροτήσει.

Η ανωτέρω προσέγγιση διατρέχει τον κίνδυνο να ανάγει τη μαθηματική πρόκληση σε μηχανισμό αναπαραγωγής και νομιμοποίησης της αποτυχίας μαθητών που προέρχονται από περιβάλλοντα που μειονεκτούν σε υψηλού επιπέδου μαθηματικές γνώσεις, καθώς αγνοεί τις κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παραμέτρους που καθορίζουν τον τρόπο συμμετοχής των μαθητών σε αυτές και δη τα θέματα ισότητας και σχέσεων εξουσίας που συνδέονται με τη δυνατότητα μαθηματικής ενδυνάμωσης όλων των μαθητών.

Μια μαθηματική πρόκληση, για να αποτελέσει αυθεντική πρόκληση συμμετοχής των μαθητών σε ανώτερες εκφάνσεις της μαθηματικής πρακτικής και να τους ενδυναμώσει όχι μόνο μαθηματικά, αλλά και κοινωνικά, θα πρέπει να αποτελέσει πρόκληση και σε κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικό επίπεδο μέσα από τη διδακτική διαχείριση του εκπαιδευτικού στην τάξη. Δηλαδή, πρόκληση που θα ενεργοποιήσει και αξιοποιήσει το κεφάλαιο και τους πόρους κάθε μαθητή που συνδέονται με τη συμμετοχή του σε διαφορετικές κοινότητες εντός και εκτός του σχολείου.

Διδακτική πλαισίωση της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη: κοινωνικά, πολιτισμικά & πολιτικά χαρακτηριστικά

Το αφήγημα της μαθηματικής εκπαίδευσης περιλαμβάνει τρεις κυρίαρχες αναγνώσεις της μάθησης και της διδασκαλίας. Αρχικά, την ατομική, με κεντρικές οπτικές αυτές του κονστρουκτιβισμού και του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού, όπου η έμφαση βρίσκεται στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης και της αυτονομίας στη μάθηση του μαθητή. Στη συνέχεια, την κοινωνικο-πολιτισμική, η οποία επικεντρώνεται στις εμπειρίες των μαθητών, στα κεφάλαια και τους πόρους (funds and resources) της γνώσης τους και στοχεύει στην ανάπτυξη της μάθησης που βασίζεται στη γνώση και στο πολιτισμικό υπόβαθρο των μαθητών. Τέλος, την κοινωνικοπολιτική, που αναδεικνύει το ρόλο του ευρύτερου πλαισίου, εστιάζοντας σε θέματα εξουσίας.

Την ανωτέρω πορεία ανάπτυξης των τριών αυτών κρίσιμων αναγνώσεων, η οποία δεν υπήρξε γραμμική ούτε υποδηλώνει κάποια ιεραρχία, αλλά συμπληρωματικότητα μάλλον στον τρόπο κατανόησης των παραμέτρων της μαθηματικής εκπαίδευσης, συνοδεύει μια παράλληλη πορεία εξέλιξης σε ό,τι αφορά ζητήματα παροχής ίσων ευκαιριών μάθησης. Η ισότητα ευκαιριών γίνεται αντιληπτή στην αρχή ως ανάγκη όλοι οι μαθητές να αποκτήσουν πρόσβαση σε 'πλούσια μαθηματικά' και να τους παρέχονται οι ίδιες για όλους ευκαιρίες να κατασκευάσουν τις δικές τους κατανοήσεις, αργότερα ως διανομή δίκαιων ευκαιριών για εννοιολογική κατανόηση και συμμετοχή στην τάξη μέσω συνεργατικών μορφών μάθησης, στη συνέχεια ως αξιοποίηση του πολιτισμικού κεφαλαίου / των πόρων γνώσης τους, και σήμερα ως ζήτημα κοινωνικής δικαιοσύνης. Και σε αυτήν την περίπτωση η εξέλιξη δεν είναι γραμμική, ούτε είναι πάντοτε σαφής ο διαχωρισμός μεταξύ των διαφορετικών κατανοήσεων της ισότητας των ευκαιριών στην εκπαίδευση των μαθηματικών.

Οι Civil, Hunter, και Crespo (2019), σε μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που συνδέεται με την έννοια της ισότητας στη μαθηματική εκπαίδευση κατά τη δεκαετία 2008 – 2018, υιοθετώντας την έννοια της ισότητας ως ευκαιρίας συμμετοχής, επιχειρούν να χαρτογραφήσουν διδακτικές πρακτικές που συμβάλλουν στην αύξηση της συμμετοχής στην τάξη των μαθηματικών, ιδίως των 'περιθωριοποιημένων' μαθητών. Η χαρτογράφηση που αποτυπώνουν προσφέρει έναν ενδιαφέροντα τρόπο ανάγνωσης της συμμετοχής των μαθητών σε μαθηματικά αλλά και σε κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικά προκλητικές δραστηριότητες στην τάξη, που απαιτεί από τους εκπαιδευτικούς να απομακρυνθούν από:

«Γνωστικές διαφορές/επιδόσεις των μαθητών … προς σημειωτικές αλληλεπιδράσεις τους μέσα σε μαθηματικές πρακτικές ή δραστηριότητες που βρίσκονται σε ένα ευρύτερο ιστορικό/κοινωνικο-πολιτιστικό πλαίσιο … η αντιμετώπιση της γνωστικής δράσης με όρους συμβολικής διαμεσολάβησης σημαίνει ότι διαφορετικά άτομα θα αλληλοεπιδράσουν με σημειωτικά διαφορετικούς τρόπους. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν ότι, παράγοντας διαφορετικά νοήματα, οι μαθητές διαμορφώνουν ξεχωριστές ανάγκες…» (Frade et al., 2013, σελ. 116)

Αναζητώντας πρακτικές των εκπαιδευτικών που επιδιώκουν την ανάπτυξη μαθησιακών περιβαλλόντων τα οποία προσφέρουν ίσες ευκαιρίες σε όλους τους μαθητές, οι Civil, etal. (2019) αναγνωρίζουν τρεις κυρίαρχες κατηγορίες, κυρίως κοινωνικο-πολιτισμικού και κοινωνικο-πολιτικού χαρακτήρα, οι οποίες παρουσιάζονται με συντομία στη συνέχεια: τις συμπεριληπτικές, τις πολιτισμικά υποστηριζόμενες και τις κοινωνικής δικαιοσύνης.

Συμπεριληπτικές Διδακτικές Πρακτικές των Μαθηματικών (Σ-ΔΠ): αναγνωρίζουν ότι ορισμένοι μαθητές μαθαίνουν περισσότερο κι άλλοι λιγότερο στην τάξη των μαθηματικών, όχι μόνο λόγω των προσωπικών τους χαρακτηριστικών, αλλά και της άνισης πρόσβασης στις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στην τάξη.

Διδακτικές πρακτικές αυτής της κατηγορίας αφορούν αρχικά τη διαχείριση των έμφυλων ανισοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση (π.χ., Leder, 1992). Επιπλέον, την ομιλία/συζήτηση στην τάξη των μαθηματικών, η ποσότητα και η ποιότητα της οποίας έχει σημασία για τη μάθηση των μαθητών - όσο περισσότερο οι μαθητές μιλούν, τόσο περισσότερο μαθαίνουν (O'Connor, 1998). Ωστόσο, η συζήτηση είναι συχνά άνισα κατανεμημένη στους μαθητές: αυτοί που χρειάζονται περισσότερες ευκαιρίες να μιλήσουν και να μοιραστούν τις ιδέες τους είναι εκείνοι που περιθωριοποιούνται στην τάξη των μαθηματικών (π.χ. Crespo & Featherstone, 2012). Ακόμη, συμπεριληπτικές διδακτικές πρακτικές θεωρούνται αυτές που υποστηρίζουν την αξιοποίηση των συμμαθητών ως πολύτιμων πόρων μάθησης, αποδίδοντας αξία σε παραγωγικές αλληλεπιδράσεις μάθησης μεταξύ συμμαθητών στην τάξη.

Πολιτισμικά Υποστηριζόμενες Διδακτικές Πρακτικές των Μαθηματικών (ΠΥ-ΔΠ): στοχεύουν σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα τόσο ισότιμο όσο και πολιτισμικά διαφορετικό, με προγράμματα σπουδών και παιδαγωγικές πρακτικές που ανταποκρίνονται στις πολιτισμικές αξίες των μαθητών. Επιθυμητές διδακτικές πρακτικές σε αυτήν την κατεύθυνση είναι εκείνες που αξιοποιούν τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά, τις εμπειρίες και τις προοπτικές τους, υποστηρίζουν την ανάπτυξη πολιτισμικά ευαίσθητων κοινοτήτων μάθησης, ενθαρρύνουν την διαπολιτισμική επικοινωνία και ανταποκρίνονται στην εθνοτική ποικιλομορφία κατά τη διδασκαλία (Johnson, 2014). Κι ακόμη, διδακτικές πρακτικές με 'κοινωνικο-πολιτική' επίγνωση, που υποστηρίζουν «το γλωσσικό και πολιτισμικό πλουραλισμό ως μέρος του δημοκρατικού σχεδίου εκπαίδευσης και ως αναγκαία απάντηση στη δημογραφική και κοινωνική αλλαγή» (Paris & Alim, 2014, σελ. 88).

Ακρογωνιαίο λίθο αυτής της οπτικής της διδασκαλίας των μαθηματικών αποτελεί η συστηματική υποστήριξη όλων των μαθητών για πρόσβαση σε κρίσιμες κατανοήσεις της 'πειθαρχίας των μαθηματικών'. Προϋποθέσεις αποτελούν ο εκπαιδευτικός που κατανοεί τους μαθητές ως 'πολιτισμικά όντα', η οικοδόμηση σχέσεων εμπιστοσύνης και ισχυρών δεσμών με την κοινότητα (καθώς μαθητές, γονείς και κοινότητα θεωρούνται εν δυνάμει συνεργάτες και πόροι για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών), η προσφορά ευκαιριών συμμετοχής όλων στον μαθηματικό λόγο, μέσα από την αξιοποίηση στην τάξη των τρόπων «ύπαρξης και δράσης που χαρακτηρίζουν την πολιτισμική τους πραγματικότητα, συμπεριλαμβανομένων των γλωσσών του σπιτιού, των τρόπων ομιλίας τους, της χρήσης του χιούμορ και των αξιών που δεν συναντώνται απαραίτητα σε άλλους τομείς της σχολικής τους εκπαίδευσης» (Civil & Hunter, 2015, σελ. 308).

Διδακτικές Πρακτικές των Μαθηματικών για Κοινωνική Δικαιοσύνη (ΚΔ-ΔΠ): αφορούν στη διαχείριση των σχέσεων εξουσίας και των εντάσεων που προκύπτουν μεταξύ των αναδυόμενων στόχων κοινωνικής δικαιοσύνης και των στόχων των μαθηματικών. Απαιτεί από τους εκπαιδευτικούς κατανόηση του εαυτού τους προσωπικά αλλά και σε σχέση με τους άλλους, καθώς και των διαφόρων δομών εξουσίας και του ρόλου τους στην εκπαίδευση. Μια τέτοια κατανόηση είναι χρονοβόρα και προϋποθέτει συνεργασίες, διάλογο και διάθεση για πειραματισμό με διαφορετικές προσεγγίσεις και έργα στην τάξη, που συχνά συνοδεύονται από εντάσεις, οι οποίες αφορούν στο μαθηματικό περιεχόμενο σε αντιπαράθεση με το πλαίσιο, τα έργα που δίνονται, την καταλληλότητα του επιπέδου και της φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας, κ.ά. (π.χ., Felton-Koestler, 2019).

Σημαντική παράμετρο των διδακτικών πρακτικών αυτής της κατηγορίας αποτελεί η αντίδραση των μαθητών σε ζητήματα κοινωνικής δικαιοσύνης. Η Vithal (2012) περιγράφει τις προκλήσεις γύρω από τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της συμμετοχής των μαθητών σε πραγματικά και σχετικά προβλήματα. Αναφέρει την ανάγκη μιας παιδαγωγικής της σύγκρουσης και του διαλόγου και προσθέτει την ανάγκη για μια παιδαγωγική της συγχώρεσης:

«Μια παιδαγωγική της σύγκρουσης και του διαλόγου για μια μαθηματική εκπαίδευση για ισότητα και κοινωνική δικαιοσύνη ανοίγει πάντοτε πληγές, έτσι ώστε η αλήθεια να γίνει γνωστή … κατανοητή. Καθένας μαθαίνει με το να βρίσκεται στη θέση και στην εμπειρία του 'Άλλου'. Όμως, μια τέτοια παιδαγωγική, για να μη διακινδυνεύσει να βαθύνει τις διαιρέσεις και τη διαφορά, πρέπει να προσφέρει ένα μέσο θεραπείας. Μια παιδαγωγική της συγχώρεσης ενσωματώνεται σε συγκρούσεις και διάλογο, ένα σημείο ελπίδας και δημιουργικής δράσης» (Vithal, όπ. π., σελ. 9)

Συνοψίζοντας, στις συμπεριληπτικές διδακτικές πρακτικές στην τάξη των μαθηματικών η έμφαση βρίσκεται στην απομάκρυνση από μορφές που ‘αποκλείουν’ και στηρίζονται στην αντίληψη ότι κάθε μαθητής συμβάλλει στην μαθηματική ενδυνάμωση στην τάξη. Οι πολιτισμικά υποστηριζόμενες διδακτικές πρακτικές αντιμετωπίζουν τις εμπειρίες των μαθητών (στο σπίτι ή / και στην κοινότητα) ως μαθηματικά πλούσιες και στηρίζονται σε αυτές τις εμπειρίες. Τέλος, οι διδακτικές πρακτικές για κοινωνική δικαιοσύνη εμπλέκουν τους μαθητές στην αξιοποίηση των μαθηματικών για να αναλύσουν κριτικά σχετικά ζητήματα.

Συμπερασματικά

Στόχος της παροχής μαθηματικών προκλήσεων είναι η ενδυνάμωση των μαθητών τόσο ως ατόμων όσο και ως μελών μιας κοινωνίας πολιτών. Σε αυτήν την κατεύθυνση, η διδακτική διαχείριση μιας μαθηματικής πρόκλησης προϋποθέτει την ενεργοποίηση των ‘μαθηματικών δυνάμεων’ που ο κάθε μαθητής φέρνει στην τάξη και την επίγνωση της λειτουργίας της σε μικρο- και μακρο- επίπεδο. Αυτό προϋποθέτει την αποδοχή, την αξιοποίηση και, ακόμη περισσότερο, την ενεργοποίηση των κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτικών χαρακτηριστικών κάθε μαθητή κατά τη διδακτική πράξη, παρέχοντας έτσι σε όλους τη δυνατότητα ανάπτυξης μαθηματικής ισχύος με συνέπειες στην ακαδημαϊκή, προσωπική, επαγγελματική και ευρύτερα κοινωνική τους επιτυχία. Κι ακόμη παρέχοντάς τους τη δυνατότητα ενίσχυσης της κριτικής συνείδησης και της δημοκρατικής ιδιότητας του πολίτη. Μακροπρόθεσμος στόχος μια τέτοιας προσέγγισης είναι η κοινωνική αλλαγή μέσω της ενδυνάμωσης των αυριανών πολιτών και της εκπαίδευσής τους στη βάση αρχών και διαδικασιών που οδηγούν σε μια πιο δίκαιη και ισότιμη κοινωνία, ·δηλαδή μέσω της ενίσχυσης της δημοκρατίας.

ΕΙΣΗΓΗΣΗ 3: ΕΠΑΓΓΕΜΑΤΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ

Στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών η στροφή στον εκπαιδευτικό και στην επαγγελματική του εξέλιξη αρχίζει με προσπάθειες εστίασης στις γνωστικές ανάγκες των μαθητών καθώς και στην έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση και στην ανάπτυξη συλλογισμού και στρατηγικών επίλυσης προβλήματος. Έχουμε κυρίως εστίαση στην ανάπτυξη της γνώσης των εκπαιδευτικών ώστε να υποστηρίζει τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών και ένας μεγάλος αριθμός ερευνών ασχολείται με τις διαστάσεις αυτής της γνώσης και με το πώς αυτή μπορεί να αναπτυχθεί (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001). Ο εκπαιδευτικός που έχει αναπτύξει αυτή τη γνώση αναμένεται να θέτει καταστάσεις μαθηματικής πρόκλησης λαμβάνοντας υπόψη τις γνωστικές ανάγκες των μαθητών. Ένας αριθμός ερευνών εστιάζει στην ανάπτυξη της γνώσης των εκπαιδευτικών με προσεγγίσεις που είναι όλο και περισσότερο ενσωματωμένες στην πρακτική της διδασκαλίας. Έτσι έχουμε πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης, όπως μελέτη μαθήματος (Hart, Alston & Murata, 2011), παρατήρηση και μελέτη βιντεοσκοπημένων διδασκαλιών (Wallin & Amador, 2019), ή κοινότητες διερεύνησης με βασικό στοιχείο τον αναστοχασμό (Jaworski, 2008). Οι πρακτικές αυτές εστιάζουν κυρίως στη σύνδεση της διδασκαλίας με τα γνωστικά χαρακτηριστικά των μαθητών, ενώ πρόσφατα η έρευνα μελετά πώς οι εκπαιδευτικοί μπορούν να πάρουν υπόψη τους τις ανάγκες μαθητών από διαφορετικά κοινωνικά ή πολιτισμικά υπόβαθρα. Στην τελευταία περίπτωση, οι ομάδες και κοινότητες διερεύνησης γίνονται πιο διευρυμένες, ενώ αντικείμενο μελέτης γίνεται το πώς οι μαθητές μπορούν να έχουν ίσες ευκαιρίες συμμετοχής σε ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα (Civil, Hunter & Crespo, 2019).

Στην εισήγησή μου θα αναφερθώ σε πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο του Ευρωπαϊκού Προγράμματος, EDUCATE [1], το οποίο συντονίζεται από το πανεπιστήμιο της Κύπρου και έχει ως στόχο την υποστήριξη των εκπαιδευτικών ώστε να σχεδιάζουν και να διαχειρίζονται στη διδασκαλία τους μαθηματικά προκλητικές δραστηριότητες που να μπορούν να εμπλέκουν όλους τους μαθητές στην τάξη. Συγκεκριμένα θα περιγράψω το πλαίσιο επαγγελματικής εξέλιξης καθώς και τις κατανοήσεις και διδακτικές πρακτικές που ανέπτυξαν οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί.

Το πλαίσιο και οι πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης

Στο πρόγραμμα EDUCATE συμμετείχαν 4 χώρες και σε κάθε χώρα εκπαιδεύτηκαν περίπου 20 εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (μελλοντικοί και εν ενεργεία). Στην Ελλάδα σχηματίστηκαν 4 ομάδες εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με 5-6 άτομα στην κάθε ομάδα. Θα αναφερθώ σε μια ομάδα εκπαιδευτικών Λυκείου με τους οποίους συνεργάστηκα κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 2018-2019. Στην ομάδα συμμετείχαν 6 έμπειροι εκπαιδευτικοί που δίδασκαν μαθηματικά σε Γενικά Λύκεια της Αττικής καθώς και τρεις ερευνητές και πραγματοποιήθηκαν 8 τρίωρες συναντήσεις.

Στις συναντήσεις οι εκπαιδευτικοί ταξινόμησαν προβλήματα σε σχέση με τη μαθηματική πρόκληση που μπορούσαν να δημιουργήσουν στην τάξη, συζήτησαν γύρω από πρακτικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας και μαθηματικής πρόκλησης σε διάφορες φάσης της διδασκαλίας και συνέδεσαν αυτές τις πρακτικές με την κουλτούρα της τάξης. Οι παραπάνω συζητήσεις βασίστηκαν σε υλικό που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος όπου οι εκπαιδευτικοί αντιμετώπιζαν φαινόμενα διδασκαλίας που παρουσιάζονταν κυρίως μέσα από περιγραφές και βιντεοσκοπημένα επεισόδια από σχολική τάξη.

Οι εκπαιδευτικοί, στηριζόμενοι στις παραπάνω δράσεις, σχεδίαζαν και πραγματοποιούσαν μαθήματα (3 διδασκαλίες ο καθένας), τα οποία βιντεοσκοπούσαν και επέλεγαν σύντομα επεισόδια που σχετίζονταν με ζητήματα που είχαν συζητηθεί στις συναντήσεις σχετικά με τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας και μαθηματική πρόκληση. Τα επεισόδια αυτά τα παρουσίαζαν στις συναντήσεις και γινόταν συζήτηση πάνω στις πρακτικές διδασκαλίας που χρησιμοποιούσαν.

Παρακάτω παρουσιάζω πώς η μαθηματική πρόκληση και η διαφοροποίηση εμφανίστηκαν στον σχεδιασμό των εκπαιδευτικών, κατά τις διδασκαλίες τους στην τάξη καθώς και στις συναντήσεις.

Η νοηματοδότηση της μαθηματικής πρόκλησης

Η μαθηματική πρόκληση φάνηκε οικεία έννοια στους εκπαιδευτικούς αλλά ο τρόπος που ο κάθε εκπαιδευτικός την κατανοούσε και την έφερνε στην τάξη του ήταν διαφορετικός. Οι δραστηριότητες που σχεδίασαν οι εκπαιδευτικοί αφορούσαν α) προβλήματα μοντελοποίησης μιας πραγματικής κατάστασης όπως για παράδειγμα την τοποθέτηση ενός καθρέπτη στον τοίχο του δωματίου ώστε να φαίνεται ολόκληρο το είδωλό μας όταν είμαστε σε απόσταση ενός μέτρου από τον καθρέπτη, β) τη διατύπωση και τεκμηρίωση μιας εικασίας μέσα από μια γεωμετρική διερεύνηση, γ) την κατασκευή προβλημάτων από τους μαθητές που η λύση τους να εκφράζεται μέσα από την επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού, δ) την κατασκευή σχημάτων μέσα από τη χρήση χειραπτικών υλικών, για παράδειγμα την κατασκευή τριγώνων μέσα από ξύλινες ράβδους διαφορετικών μηκών και ε) την επίλυση ασκήσεων υψηλής δυσκολίας όπως για παράδειγμα πολυωνυμικών εξισώσεων ή εφαρμογή των τύπων Vieta.

Η μαθηματική πρόκληση φάνηκε για κάποιους να έχει στοιχεία μαθηματικής διερεύνησης και ανάπτυξη συλλογισμών καθώς και διατύπωση ορισμών, ενώ για άλλους εκπαιδευτικούς να απαιτεί πολύπλοκες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων και έμφαση στην ακρίβεια και αυστηρότητα των μαθηματικών. Στη διδασκαλία στην τάξη η μαθηματική πρόκληση και η διατήρηση της εκφράστηκε μέσα από ερωτήσεις επέκτασης, μέσα από πολύ μειωμένο βαθμό παρέμβασης, μέσα από ερωτήσεις επεξήγησης, και μέσα από νόρμες επικοινωνίας και συνεργασίας που προσπάθησαν οι εκπαιδευτικοί να δημιουργήσουν.

Το παρακάτω απόσπασμα από τη συζήτηση στη δεύτερη συνάντηση δείχνει τις διαφορετικές θέσεις των εκπαιδευτικών σε σχέση με τη μαθηματική πρόκληση. Ο εκπαιδευτικός Τ3 παρουσιάζει το μάθημα που έκανε σε μια τάξη της Α΄ Λυκείου όπου εισάγει τις ρίζες ανώτερης τάξης μέσα από την εύρεση της πλευράς ενός τετραγώνου όταν είναι γνωστό το εμβαδόν του. Ο στόχος του είναι οι μαθητές να καταλήξουν στον ορισμό της ρίζας. Η αντίθεση εμφανίζεται κυρίως ανάμεσα στον εκπαιδευτικό Τ3 και στον Τ5. Ο Τ5 βλέπει ότι το γεωμετρικό πλαίσιο είναι περιοριστικό καθώς αναπαριστάνει μόνο θετικούς αριθμούς και αναρωτιέται τι έμαθαν τελικά οι μαθητές μέσα από μια τέτοια δραστηριότητα. Ο Τ3 θεωρεί ότι αυτό που έμαθαν οι μαθητές ήταν η μαθηματική διερεύνηση:

> Η μεγάλη πρόκληση εδώ είναι ότι για πρώτη φορά διερωτόμαστε γιατί χρειάζομαι αυτό [την τετραγωνική ρίζα], το δεύτερο είναι η εμβάθυνση σε αυτές τις έννοιες πέρα από τον ορισμό. Δεν υπάρχει αυτό το βάθος όταν δίνω τον ορισμό και αρχίζω να κτίζω στον ορισμό...

Ο Τ5 σχολιάζει προσπαθώντας να δει ακριβώς ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο:

> Το πρώτο ζήτημα που βλέπω είναι ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας και το άλλο το είδος των αριθμών. Θα έδινα έμφαση στον ορισμό των ριζών, τι είναι αυτά τα πράγματα, πώς ορίζονται. Η ρίζα είναι μια διαδικασία και αυτό δικαιολογεί το σύμβολο. Είναι σημαντικό να εισάγουμε τους μαθητές στη διαδικασία που οδηγεί στη ρίζα. Και για αυτό χρησιμοποιώ το σύμβολο... και είναι άλλο πράγμα η φύση των αριθμών ότι το $\sqrt{9}$ είναι ακέραιος ενώ το $\sqrt{2}$ δεν είναι ... βλέπω δύο διαφορετικά θέματα.

Στην παραπάνω συζήτηση η μαθηματική πρόκληση αντιμετωπίζεται από τον Τ5 μέσα από την έμφαση στο περιεχόμενο και στον συμβολισμό αναζητώντας την ακρίβεια και την αυστηρότητα των μαθηματικών ενώ ο Τ3 βλέπει την πρόκληση μέσα στην προσπάθεια των μαθητών να οδηγηθούν μόνοι τους στην έννοια της ρίζας νιοστής τάξης.

Η νοηματοδότηση της διαφοροποίησης της διδασκαλίας

Η διαφοροποίηση της διδασκαλίας με βάση τις ανάγκες των μαθητών εμφανίστηκε στον σχεδιασμό των μαθημάτων από τους εκπαιδευτικούς μέσα από α) τη διατύπωση προβλημάτων που επιδέχονται περισσότερες από μια λύση όπως για παράδειγμα το σχεδιασμό καθέτων ευθυγράμμων τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις πλευρές τετραγώνου, β) τη διάθεση εργαλείων όπως τετραγωνισμένο χαρτί, χειραπτικό ή ψηφιακό υλικό, αναπαραστάσεις, γ) την εργασία των μαθητών σε ομάδες με βάσει την προτίμηση τους ή την επίδοση τους, δ) τη χρήση πλαισίου οικείου στους μαθητές, ε) τις διαφορετικής δυσκολίας ασκήσεις και στ) γραπτές υποδείξεις που οι μαθητές θα χρησιμοποιούσαν όταν θα χρειάζονταν βοήθεια.

Στην τάξη πρακτικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας κυρίως εκφράστηκαν από την υπενθύμιση προηγούμενων γνώσεων, τη συζήτηση γύρω από το πραγματικό πλαίσιο και τις βασικές μαθηματικές ιδέες της δραστηριότητας κυρίως στην αρχή του μαθήματος, την παροχή ατομικής βοήθειας όταν οι μαθητές τη χρειάζονταν μέσα από εστιασμένες ερωτήσεις, στην ενθάρρυνση των μαθητών να εκφράσουν τις σκέψεις τους και να ακούσουν τη σκέψη των συμμαθητών τους, καθώς στη συζήτηση στην τάξη των διαφορετικών λύσεων των μαθητών.

Από την πρώτη συνάντηση οι εκπαιδευτικοί αναζητούσαν το νόημα της διαφοροποίησης που διαμορφωνόταν μέσα από την αλληλεπίδραση με τα υλικά του προγράμματος και τις συζητήσεις. Διαφορετικές απόψεις εκφράζονταν από τους εκπαιδευτικούς ιδιαίτερα στις αρχικές συναντήσεις. Απόψεις όπως «κάθε μαθητής μπορεί να σκεφτεί», «πρέπει να γνωρίζουμε τους μαθητές μας για να κάνουμε διαφοροποίηση», «είναι δύσκολο γιατί κάποιοι μαθητές έχουν πολλές δυσκολίες» καθόρισαν σε μεγάλο βαθμό τις κατανοήσεις που αναπτύχθηκαν. Όλοι οι εκπαιδευτικοί έβαλαν τους μαθητές τους να δουλέψουν σε ομάδες και είδαν αυτό βοηθούσε όλους τους μαθητές να εμπλακούν. Οι εκπαιδευτικοί περιέγραψαν ως στοιχεία διαφοροποίησης προσεγγίσεις που δοκίμασαν στις διδασκαλίες τους όπως η σύνδεση αλγεβρικού και γεωμετρικού πλαισίου, η σταδιακή γενίκευση των απαιτήσεων του προβλήματος, η χρήση εργαλείων για πειραματισμό, η κατασκευή προβλημάτων από τους μαθητές και η χρήση γραπτών υποδείξεων.

Συμπερασματικά σχόλια

Το πλαίσιο επαγγελματικής εξέλιξης όπου οι εκπαιδευτικοί αλληλεπιδρούσαν με τα υλικά του προγράμματος, και συζητούσαν τις διδασκαλίες τους αναφορικά με τη μαθηματική πρόκληση και τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας υποστήριξε καινούριες κατανοήσεις και πρακτικές για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί αυτοί συνεχίζουν και την τρέχουσα σχολική χρονιά τη συνεργασία πέρα από το πλαίσιο του προγράμματος. Δημιουργείται έτσι μια κοινότητα εκπαιδευτικών όπου η μαθηματική πρόκληση για όλους τους μαθητές γίνεται ένα ζήτημα από κοινού διερεύνησης.

ΕΙΣΗΓΗΣΗ 4: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΙ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Η σύνδεση και οι διαφορές μεταξύ των μαθηματικών του πανεπιστημίου και αυτών της σχολικής τάξης έχουν συζητηθεί στη βιβλιογραφία κυρίως στο πλαίσιο της μετάβασης από τη σχολική τάξη στο πανεπιστήμιο (Gueudet, 2008). Αυτό ήταν και το θέμα του στρογγυλού τραπεζιού στο προηγούμενο συνέδριο της Εν.Ε.Δι.Μ. (Μπαμπίλη κ.ά., 2017). Για αυτό το στρογγυλό τραπέζι και αναφορικά με τη μαθηματική πρόκληση στη σχολική τάξη πιο σχετικό είναι ένα άλλο είδος μετάβασης: η μετάβαση των εκπαιδευτικών, ή μελλοντικών εκπαιδευτικών για την ακρίβεια, από τις σπουδές τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση στη σχολική τάξη. Αυτή η διπλή μετάβαση απο το σχολείο (ως μαθητής) στο πανεπιστήμιο (ως φοιτητής) και μετά από το πανεπιστήμιο (ως φοιτητής) στην τάξη (ως εκπαιδευτικός) περιγράφεται από τον Klein (1908/1932) ως *διπλή ασυνέχεια* (*double discontinuity*). Το δεύτερο τμήμα αυτής της ασυνέχειας είναι μία πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς που καλούνται να εφαρμόσουν στην τάξη αυτά που μαθαίνουν στο πανεπιστήμιο. Ένα θέμα για συζήτηση στο στρογγυλό τραπέζι είναι εάν και πώς το πανεπιστήμιο προετοιμάζει (ή θα μπορούσε να προετοιμάζει) τους εκπαιδευτικούς για μία τάξη μαθηματικής πρόκλησης.

Σύμφωνα με τον Klein (1908/1932), ο εκπαιδευτικός χρειάζεται γνώση που είναι *ευρύτερη* από αυτή που θα διαχειριστεί στη τάξη και αναμένεται να είναι προετοιμασμένος για τις δυσκολίες των μαθητών ώστε να μπορεί να τους βοηθήσει να τις ξεπεράσουν. Ακόμα περισσότερο είναι αναγκαίο να νιώθει σιγουριά για να μπορέσει να προκαλέσει τους μαθητές μαθηματικά και να ανταποκριθεί στο απαιτητικό κλίμα της τάξης. Τι είναι όμως αυτό που στοιχειοθετεί αυτή την *ευρύτητα* στην γνώση;

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι πτυχιούχοι μαθηματικών τμημάτων και εκείνοι της πρωτοβάθμιας έχουν παρακολουθήσει μαθήματα μαθηματικών στις πανεπιστημιακές σπουδές τους. Γενικά, υπάρχει η παραδοχή ότι ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο του εκπαιδευτικού είναι *αναγκαίο* για την υψηλή ποιότητα του μαθήματος. Είναι όμως και *ικανό;*

Ο Winsløw (2014), για παράδειγμα, περιγράφει διαφορετικές μαθηματικές πρακτικές (praxeologies) στο πανεπιστήμιο από αυτές που συναντάμε στο σχολείο. Αυτό που θεωρείται ως αποδεκτή δραστηριότητα, τεχνική, μεθοδολογία ή θεωρία στο πανεπιστήμιο είναι διαφορετικό από αυτό που χρησιμοποιείται στο σχολείο. Όταν οι εκπαιδευτικοί δεν είναι προετοιμασμένοι να αναγνωρίσουν και να αντιμετωπίσουν αυτές τις διαφορές, δυσκολεύονται να μετατρέψουν ό,τι έχουν μάθει σε διδακτική πράξη. Κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι στόχος των πανεπιστημιακών μαθηματικών είναι να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να διευρύνουν τον *Μαθηματικό Ορίζοντά* τους (Ball, Thames & Phelps, 2008). Ο Ορίζοντας αυτός θεωρείται η διεύρυνση του μαθηματικού περιεχομένου πέρα από το σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα (Papadaki, 2019; Zoitsakos, Zachariades & Sakonidis, 2018). Οι Zazkis and Mamolo (2011) βλέπουν τον Ορίζοντα ως *εφαρμογή της προχωρημένης μαθηματικής σκέψης* σε μία διδακτική κατάσταση. Οι Figueiras, Ribeiro, Carrillo, Fernandez και Deulofeu (2011) κριτικάρουν αυτή την οπτική και ισχυρίζονται ότι πέρα από την προχωρημένη μαθηματική σκέψη, ο βαθύτερος αναστοχασμός πάνω στις μαθηματικές ιδέες και στις συνδέσεις τους είναι απαραίτητος για τους εκπαιδευτικούς. Σε συμφωνία με αυτή την οπτική, οι Jakobsen, Thames, Ribeiro και Delaney (2012) βλέπουν τον Ορίζοντα περισσότερο ως τον *προσανατολισμό*, την *εξοικείωση* με το μαθηματικό αντικείμενο και την *επίγνωση* των μαθηματικών αρχών και δομών που συνεισφέρουν στη διδασκαλία στο σχολείο δείχνοντας στους εκπαιδευτικούς πώς το περιεχόμενο του αναλυτικού πρόγραμματος συνδέται με την ευρύτερη μαθηματική θεωρία. Ποιες είναι όμως οι προτεραιότητες αυτών που διδάσκουν μαθηματικά στο πανεπιστήμιο;

Κατά κανόνα, στα μαθηματικά τμήματα, τα προπτυχιακά μαθήματα των μαθηματικών διδάσκονται από μαθηματικούς (πολύ συχνά ενεργούς ερευνητές) και απευθύνονται σε φοιτητές που έχουν επιλέξει να σπουδάσουν μαθηματικά ανεξάρτητα με το αν τελικά θα εργαστούν στην εκπαίδευση. Στα παιδαγωγικά τμήματα, τα μαθηματικά μπορεί να διδάσκονται από ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών. Οι πρακτικές των ερευνητών μαθηματικών είναι διαφορετικές από αυτές των ερευνητών της διδακτικής των μαθηματικών όταν διδάσκουν μαθηματικά σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Για παράδειγμα, οι Cooper και Zaslavsky (2017) παρατήρησαν ότι σε μαθήματα για μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, ο ερευνητής μαθηματικός εστιάζει στην ορθότητα της απόδειξης που προτείνεται, ενώ η ερευνήτρια της διδακτικής στο άτομο που παράγει την απόδειξη και στις διδακτικές διαστάσεις της εμπλοκής του με αυτήν την απόδειξη. Τι θεωρούν όμως οι εκπαιδευτικοί ως χρήσιμο στα μαθήματα που παρακολούθησαν στο πανεπιστήμιο για τη διδασκαλία τους στη τάξη;

Η έρευνα έχει δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η πανεπιστημιακή γνώση σχετικά με μαθηματικές έννοιες, επίλυση προβλήματος, χρήση των μαθηματικών σε άλλα γνωστικά αντικείμενα αλλά και ο ρόλος της διαίσθησης στη μαθηματική δραστηριότητα επηρεάζουν τη διδασκαλία τους (π.χ., Zazkis & Leikin, 2010). Επιπλέον, αναγνωρίζουν ότι οι σπουδές τους ενισχύουν την αυτοπεποίθησή τους με το αντικείμενο και την ικανότητά τους να αναγνωρίζουν τις δυσκολίες των μαθητών τους (ibid). Πρόσφατες μελέτες προτείνουν ότι η διδασκαλία στο πανεπιστήμιο από ερευνητές μαθηματικούς εισάγει τους φοιτητές σε πρακτικές βασισμένες στη μαθηματική έρευνα, όπως αξιοποίηση παραδειγμάτων, σύνδεση μαθηματικών περιοχών, οπτικοποίηση και απλοποίηση, οι οποίες μπορούν μετά να αξιοποιηθούν στην τάξη (Πετροπούλου, Μάλη & Μπιζά, 2019). Παρότι οι εκπαιδευτικοί ομολογούν ότι η εμπλοκή τους με το μαθηματικό περιεχόμενο συνεισφέρει στην ποιότητα του μαθήματός τους, εκφράζουν παράλληλα δυσκολία να δουν τη χρήση αυτών που έμαθαν στο πανεπιστήμιο στη σχολική τάξη (Zazkis & Leikin, 2010). Επιπλέον, πολύ συχνά οι εκπαιδευτικοί ενώ έχουν τις μαθηματικές γνώσεις και τις προσδοκίες να εμπλέξουν τους μαθητές τους στη μαθηματική πρόκληση, η σχολική πραγματικότητα, π.χ., το εξεταστικό σύστημα ή η διαχείριση της τάξης, τους αναγκάζουν να κάνουν *συμβιβασμούς* (practical rationality of teaching, Herbst & Chazan, 2003), άλλοτε ασυνείδητα και άλλοτε συνειδητά, με κριτήρια προσωπικά, επαγγελματικά ή και θεσμικά (Nardi, Biza & Zachariades, 2012). Πώς, επομένως, το πανεπιστήμιο προετοιμάζει (ή θα μπορούσε να προετοιμάζει) τους εκπαιδευτικούς για μία τάξη μαθηματικής πρόκλησης;

Η θέση μου είναι ότι τα πανεπιστημιακά μαθηματικά μπορούν να διευρύνουν τον Μαθηματικό Ορίζοντα των μελλοντικών εκπαιδευτικών, πέρα από το αναλυτικό πρόγραμμα, όταν συνδυάζονται με τη παιδαγωγική διάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Μαθηματικό περιεχόμενο και παιδαγωγική θεωρία είναι αλληλένδετα με στόχο τη διαμόρφωση του *μαθηματικού και παιδαγωγικού λόγου* των εκπαιδευτικών. Η τοποθέτηση αυτή ενστερνίζεται απόψεις που ισχυρίζονται ότι αυτός ο λόγος μπορεί να αναπτυχθεί στο πλαίσιο και τη διαπραγμάτευση συγκεκριμένων διδακτικών καταστάσεων (Goodell, 2006). Τέτοιες καταστάσεις μπορεί να έχουν τη μορφή κρίσιμων συμβάντων (Goodell, 2006; Potari & Psycharis, 2018), δηλαδή συμβάντων που οι εκπαιδευτικοί θεωρούν σημαντικά για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών στην τάξη τους. Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί χρειάζεται να αναπτύξουν τις δεξιότητες να μπορούν να τα δουν μέσα στην πολυπλοκότητα της σχολικής πραγματικότητας και στη συνέχεια να είναι σε θέση να αναστοχαστούν πάνω σε αυτά. Η συζήτηση για τα μαθηματικά ή για τη θεωρία της διδακτικής των μαθηματικών χωρίς συνδέσεις με συγκεκριμένες καταστάσεις δεν διευκολύνει τη δημιουργία συνδέσεων και την ανάπτυξη τεχνικών που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στην τάξη. Όταν, για παράδειγμα, μια ευκαιρία για μαθηματική πρόκληση προσφέρεται στην τάξη μέσω της απάντησης ενός μαθητή, πώς θα μπορέσει ο εκπαιδευτικός να την αναγνωρίσει; πώς θα την αξιοποιήσει για το όφελος όλης της τάξης λαμβάνοντας υπόψη τις ανάγκες των άλλων μαθητών; θα παρακάμψει το σχέδιο μαθήματος; ή θα την αγνοήσει παρασυρμένος από τη φασαρία στην τάξη και τη μη συμμετοχή των μαθητών; Αυτά είναι θέματα που δε μπορούν διακριθούν όταν η συζήτηση είναι θεωρητική και χωρίς πλαίσιο. Αντίθετα, αναδεικνύονται με σαφήνεια όταν η συζήτηση είναι πλαισιωμένη σε συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις.

Στη δουλειά μας στο πρόγραμμα MathTASK (π.χ., Biza, Nardi & Zachariades, 2018; https://www.uea.ac.uk/education/mathtask), χρησιμοποιούμε συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις για την έρευνα και την ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Δίνουμε στους εκπαιδευτικούς (μελλοντικούς ή εν ενεργεία) μία διδακτική κατάσταση που έχει σχεδιαστεί με βάση τη διδακτική εμπειρία και τα αποτελέσματα της έρευνας και τους ζητάμε να απαντήσουν γραπτά σε μία σειρά ερωτημάτων σχετικά με την εν λόγω κατάσταση και το πώς θα δρούσαν αν είχαν τον ρόλο του διδάσκοντα στη συγκεκριμένη τάξη. Μετά τους προσκαλούμε σε ανοιχτή ή σε μικρές ομάδες συζήτηση ή σε συνέντευξη. Η ανάλυση γραπτών απαντήσεων και της συζήτησης που ακολουθεί ανέδειξε τέσσερα χαρακτηριστικά των δεξιοτήτων των εκπαιδευτικών να αναγνωρίζουν κρίσιμα σημεία σε διδακτικές καταστάσεις και να διαμορφώνουν την αντίδρασή τους σε αυτά:

α) *Συνέπεια* ανάμεσα στις προτεραιότητες/αρχές που εκφράζει ο εκπαιδευτικός και πώς προτίθεται να αντιδράσει στον/στους μαθητή/ές της διδακτικής κατάστασης. Για παράδειγμα, όταν ο εκπαιδευτικός λέει ότι η συμμετοχή των μαθητών είναι σημαντική στο μάθημά του, προτείνει ενέργειες που ενθαρρύνουν αυτή τη συμμετοχή ή απλά λέει στους μαθητές τι πρέπει να κάνουν;

β) *Εξειδίκευση* της απάντησης στη συγκεκριμένη κατάσταση της τάξης. Για παράδειγμα, όταν ο εκπαιδευτικός μιλά για τα οφέλη της οπτικοποίησης, δίνει παραδείγματα σχετικά με το πλαίσιο της διδακτικής κατάστασης ή μιλά με γενικότητες;

γ) *Υποστασιοποίηση του παιδαγωγικού λόγου* όπως χρησιμοποιείται στη θεωρία της διδακτικής των μαθηματικών. Για παράδειγμα, όταν ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί θεωρητική ορολογία από τη διδακτική των μαθηματικών (π.χ., *εννοιολογική* και *διαδικαστική κατανόηση*) για να αναλύσει μία διδακτική κατάσταση όπου οι μαθητές εργάζονται με αλγεβρικές παραστάσεις, είναι η χρήση των όρων συνεπής με τη θεωρία και σχετική με τη κατάσταση που αναφέρονται; και

δ) *Υποστασιοποίηση του μαθηματικού λόγου* όπως χρησιμοποιείται στη μαθηματική θεωρία. Για παράδειγμα, όταν ο εκπαιδευτικός αναφέρεται στα αριθμητικά σύνολα (π.χ., ακέραιους, φυσικούς, ρητούς αριθμούς) για να αναλύσει μία διδακτική κατάσταση όπου οι μαθητές εργάζονται με προβλήματα κλασμάτων, είναι αυτή η χρήση ορθή και σχετική με τη κατάσταση στην οποία αναφέρονται; (Biza et al., 2018).

Χρησιμοποιώ διδακτικές καταστάσεις στα μαθήματα της διδακτικής των μαθηματικών για προπτυχιακούς φοιτητές μαθηματικών στο πανεπιστήμιό μου και τα τέσσερα παραπάνω χαρακτηριστικά έχουν φανεί πολύ χρήσιμα στη διαμορφωτική και τελική αξιολόγηση των φοιτητών. Επίσης, η αναφορά στα χαρακτηριστικά διευκολύνει την σύνθεση και την ισορροπία του μαθηματικού και παιδαγωγικού λόγου που διαμορφώνουν αυτό που θεωρώ σημαντικό για την προετοιμασία των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική πρόκληση στη σχολική τάξης.

ΣΥΝΘΕΣΗ

Μέσα από τις τέσσερις εισηγήσεις φαίνεται ότι η εισαγωγή της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη και στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών εδράζεται σε μια σειρά πολλαπλών μεταβάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση και τη διδασκαλία: από τον σχεδιασμό της διδασκαλίας στην υλοποίησή της και στην πολυπλοκότητα της διαχείρισης πολλαπλών μαθησιακών αναγκών και προφίλ των μαθητών στη σχολική τάξη, από τη σχολική τάξη και την προσπάθεια εξισορρόπησης μαθηματικής πρόκλησης και διαφοροποίησης στον διαμοιρασμό εμπειριών με συναδέλφους και ερευνητές στο πλαίσιο της ομάδας επαγγελματικής ανάπτυξης στο πανεπιστήμιο και, από τα μαθηματικά των πανεπιστημιακών σπουδών και τις προκλήσεις των προχωρημένων μαθηματικών στην παιδαγωγική διάσταση της μαθηματικής πρόκλησης στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ακολουθώντας μια ολιστική προσέγγιση της μαθηματικής πρόκλησης στη σχολική τάξη και την εκπαίδευση εκπαιδευτικών και οι τέσσερις εισηγήσεις φωτίζουν προβληματικές πτυχές αυτών των μεταβάσεων μιας και η μαθηματική πρόκληση φαίνεται να αυξάνει την πολυπλοκότητα της διδασκαλίας και τα διλήμματα για τον εκπαιδευτικό.

Για παράδειγμα, στο επίπεδο του σχεδιασμού κατάλληλων δραστηριοτήτων εντοπίσαμε την ένταση μεταξύ της μαθηματικής πρόκλησης και της δυνατότητας ευθυγράμμισής της με τη μαθηματική εμπειρία κάθε μαθητή στην τάξη όπως και με την δημιουργική μαθηματική σκέψη. Στο επίπεδο της διδασκαλίας στην τάξη, αναγνωρίσαμε ως κεντρικό το ζήτημα της παροχής ίσων ευκαιριών μάθησης στους μαθητές και αναζητήσαμε τις διαφορετικές οπτικές μέσω των οποίων η υπάρχουσα έρευνα έχει φωτίσει το θέμα: ως δυνατότητα κατασκευής προσωπικών κατανοήσεων σε 'πλούσια' μαθηματικά, ως εννοιολογική κατανόηση και συμμετοχή στο μάθημα μέσω συνεργατικών μορφών μάθησης, ως αξιοποίηση του πολιτισμικού κεφαλαίου των μαθητών και ως ζήτημα κοινωνικής δικαιοσύνης.

Στην εκπαίδευση εν ενεργεία εκπαιδευτικών αναζητήσαμε δραστηριότητες και υλικά που θα μπορούσαν να τροφοδοτήσουν τη δημιουργία προβλημάτων και διδακτικών καταστάσεων από τους ίδιους προκειμένου να φέρουν τη μαθηματική πρόκληση στην τάξη και να την κάνουν προσβάσιμη για όλους τους μαθητές. Επίσης, αναγνωρίσαμε τις δυσκολίες εξισορρόπησης της μαθηματικής πρόκλησης και της διαφοροποίησης τόσο στον σχεδιασμό όσο και στην εφαρμογή γνωστικά απαιτητικών δραστηριοτήτων στην τάξη. Τέλος, αναδείξαμε τη διάσταση στις νοηματοδοτήσεις της μαθηματικής πρόκλησης από εν ενεργεία εκπαιδευτικούς με έμφαση είτε στη μαθηματική διερεύνηση και την ανάπτυξη συλλογισμών είτε στην πολυπλοκότητα των μεθόδων επίλυσης προβλήματος και την μαθηματική αυστηρότητα.

Στην εκπαίδευση μελλοντικών εκπαιδευτικών εντοπίσαμε την επιστημολογική διάσταση ανάμεσα στη διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο μέσα από πρακτικές που βασίζονται στη μαθηματική έρευνα και στη διδασκαλία στη σχολική τάξη. Επίσης, θίξαμε την σχέση του μαθηματικού υπόβαθρου των εκπαιδευτικών με τη δυνατότητά τους να σχεδιάζουν μαθηματικά προκλητικές δραστηριότητες, ενώ αναφερθήκαμε στη ματαίωση των προσπαθειών των εκπαιδευτικών να εμπλέξουν τους μαθητές σε τέτοιες δραστηριότητες λόγω των αναγκαίων συμβιβασμών που προκαλεί η καθημερινή σχολική πραγματικότητα, το εξεταστικό σύστημα και η εδραιωμένη κουλτούρα.

Και οι τέσσερις εισηγήσεις, χωρίς να παρακάμπτουν τις διαστάσεις που αφορούν το μαθηματικό περιεχόμενο, συμβάλλουν στη διεύρυνση της οπτικής μας για την μαθηματική πρόκληση στη διδασκαλία φέρνοντας στην επιφάνεια μια σειρά από άλλες διαστάσεις όπως η χρήση (ψηφιακών και μη) πηγών και εργαλείων, η αναζήτηση κατάλληλων διδακτικών πρακτικών κοινωνικο-πολιτισμικού και κοινωνικο-πολιτικού χαρακτήρα, το είδος της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών είτε σε προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης είτε στο πανεπιστήμιο. Ένα κοινό στοιχείο όλων των εισηγήσεων είναι αναγνώριση της σημασίας των δραστηριοτήτων με τις οποίες εμπλέκονται μαθητές και εκπαιδευτικοί ως μαθητευόμενοι όπως και του κεντρικού ρόλου του εκπαιδευτικού στην εισαγωγή και τη διαχείριση της μαθηματικής πρόκλησης κατά τη διδασκαλία. Οι προτάσεις μας περιλαμβάνουν:

- Τη διάκριση των δραστηριοτήτων με μαθηματική πρόκληση όχι μόνο με βάση το μαθηματικό περιεχόμενο αλλά και την στόχευσή τους σε επιδιωκόμενες δράσεις των μαθητών όπως η δημιουργία μαθηματικού νοήματος, ο συστηματικός πειραματισμός και η ανάπτυξη στρατηγικών, η δημιουργική μαθηματική σκέψη.
- Την ανάπτυξη διδακτικών πρακτικών που ενισχύουν την παροχή ίσων ευκαιριών σε όλους τους μαθητές όπως: (α) πρακτικές συμπερίληψης που εστιάζονται στην διαχείριση των έμφυλων ανισοτήτων, στη συζήτηση στην τάξη, και την αξιοποίηση των αλληλεπιδράσεων των μαθητών ως πηγών μάθησης, (β) πολιτισμικά υποστηριζόμενες διδακτικές πρακτικές που αξιοποιούν στη διδασκαλία τα πολιτισμικά χαρακτηριστικά των μαθητών, υποστηρίζουν την διαπολιτισμική επικοινωνία και τον γλωσσικό και πολιτισμικό πλουραλισμό και αξιοποιούν τις καθημερινές εμπειρίες των μαθητών (π.χ. στο σπίτι) ως μαθηματικά πλούσιες, (γ) διδακτικές πρακτικές διαχείρισης των σχέσεων εξουσίας που εμπλέκουν τους μαθητές στην αξιοποίηση των μαθηματικών για να αναλύσουν με κριτικό τρόπο ζητήματα κοινωνικής δικαιοσύνης.
- Την ενίσχυση των προγραμμάτων εκπαίδευσης εκπαιδευτικών μέσα από πρακτικές επαγγελματικής εξέλιξης που μπορούν να υποστηρίξουν τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν κατανοήσεις για το τι σημαίνει ουσιαστική μαθηματική εμπλοκή όλων των μαθητών στην τάξη και διδακτικές πρακτικές για την επίτευξη του στόχου αυτού. Αυτές περιλαμβάνουν: τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων, τη συζήτηση διαφορετικών νοηματοδοτήσεων

για τη μαθηματική πρόκληση, την έμφαση στο είδος των ερωτήσεων των εκπαιδευτικών (π.χ. «γιατί», ερωτήσεις επέκτασης) και γενικότερα στο είδος και την έκταση των παρεμβάσεών τους κατά τη διδασκαλία και την εστίαση στη δημιουργία κατάλληλων νορμών επικοινωνίας μέσα στην τάξη (π.χ. συζήτηση με όλη την τάξη, διαμοιρασμός ιδεών/λύσεων).

- Τη στόχευση της διδασκαλίας των πανεπιστημιακών μαθηματικών στη δημιουργία ενός μαθηματικού και παιδαγωγικού λόγου που θα διευρύνει τον Μαθηματικό Ορίζοντα των μελλοντικών εκπαιδευτικών και παράλληλα θα αναδεικνύει την παιδαγωγική διάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Σε συμφωνία με υπάρχουσες προσεγγίσεις στον χώρο της εκπαίδευσης των (μελλοντικών) εκπαιδευτικών σε διεθνές επίπεδο, ο λόγος αυτός μπορεί να αναπτυχθεί στο πλαίσιο της διαπραγμάτευσης συγκεκριμένων διδακτικών καταστάσεων (π.χ. με τη μορφή υποθετικών καταστάσεων, κρίσιμων συμβάντων).

Σημειώσεις

1. Το πρόγραμμα με τίτλο «Enhancing Differentiated Instruction and Cognitive Activation in Mathematics Lessons by Supporting Teacher Learning (EDUCATE)» (Project reference: 2017-1-CY01-KA201-026749, Programme: Erasmus+) χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η παρούσα δημοσίευση δεσμεύει μόνο τους συντάκτες της και η Επιτροπή δεν ευθύνεται για τυχόν χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Applebaum, M., & Leikin, R. (2014). Mathematical challenge in the eyes of the beholder: Mathematics teachers' views. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 14*(4), 388–403.

Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V.Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th edition) (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Ball, D. L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barbeau E., & P. Taylor (Eds.) (2009). *Mathematical challenge in and beyond the classroom: ICMI Study-16 Volume*. New York, NY: Springer.

Beghetto, R., & Kaufman, J. (2009). Do we all have multicreative potential? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(1-2), 39-44.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2018). Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. In T. Leuders, J. Leuders, & K. Philipp (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice,* (pp. 55-78). New York: Springer.

Boaler, J. (2002). Learning from teaching: Exploring the relationship between 'reform' curriculum and equity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(4), 239-258.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Civil, M., & Hunter, R. (2015). Participation of non-dominant students in argumentation in the mathematics classroom. *Intercultural Journal*, *26*(4), 296–312.

Civil, M., Hunter, R. & Crespo, S. (2019). Mathematics Teachers Committed to Equity: A Review of Teaching Practices. In D. Potari & O. Chapman (Eds.) *The Handbook of Mathematics Teacher Education*, Vol.1 (pp. 231- 262). Leiden, Boston: Brill Sense.

Cooper, J., & Zaslavsky, O. (2017). A mathematics educator and a mathematician co-teaching mathematics – Affordances for teacher education. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 1945-1952). Dublin, Ireland.

Crespo, S., & Featherstone, H. (2012). Counteracting the language of math ability: Preservice teachers explore the role of status in elementary classrooms. In L. J. Jacobsen, J. Mistele, & B. Sriraman (Eds.), *Mathematics teacher education in the public interest* (pp. 159–179). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Felton-Koestler, M. (2019). Children know more than I think they do: The evolution of one teacher's views about equitable mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(2), 153-177.

Figueiras, L., Ribeiro, C. M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. (2011). Teacher's advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, *31*(3), 26-28.

Frade, C., Acioly-Régnier, N., & Jun, L. (2013). Beyond deficit models of learning mathematics: Socio-cultural directions for change and research. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *3rd International Handbook of Mathematics Education* (pp. 101-144). NY: Springer.

Goldenberg, E. P. (2019). Problem posing and creativity in elementary-school mathematics. *Constructivist Foundations, 14*(3), 319-331.

Goldenberg, E. P., Mark, J., Kang, J., Fries, M., Carter, C., & Cordner, T. (2015). *Making sense of algebra. Portsmouth.* NH: Heinemann.

Goodell, J. E. (2006). Using Critical Incident Reflections: A Self-Study as a Mathematics Teacher Educator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 221-248.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 33–56.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 237-254.

Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education*. Netherlands: Springer.

Herbst, P., & Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: The case of engaging students in proving. *For the Learning of Mathematics*, *23*(1), 2–14.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. In *12th International Congress on Mathematical Education (12th ICME)* (pp. 4635–4644). Seoul, Korea.

Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: Teachers and didacticians in collaboration. In K. Krainer & T. Wood (Eds.) *Participants in mathematics teacher education: Individuals, teams, communities and networks. The international handbook of mathematics teacher education* (Vol.3, pp. 309-330). Rotterdam: Sense Publishers.

Johnson, L. (2014). Culturally responsive leadership for community empowerment. *Multicultural Education Review*, *6*(2), 145–170.

Klein, F. (1908/1932). *Elementary Mathematics from an advanced standpoint* (trans: Hedrick, E., Noble, C.). London: MacMillan.

Leder, G. C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 597–622). NY: Macmillan Publishing.

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students.* (Part IV—synthesis, Ch. 23, pp. 385–411). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Μπαμπίλη, Α., Μπούφη, Α., Στουραΐτης, Τριανταφυλλίδης, Τ., & Ναρδή, Ε. (Συντονίστρια) (2017). Στρογγυλό τραπέζι - Μεταβάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση (πρωτοβάθμια-δευτεροβάθμια-τριτοβάθμια-σχολείο): Επιστημολογικές, ψυχολογικές, παιδαγωγικές και θεσμικές διαστάσεις. Στο Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (Επιμ.), *Πρακτικά του 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 85-105). Αθήνα, Ελλάδα: ΕΝΕΔΙΜ.

Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2012). ‘Warrant’ revisited: Integrating mathematics teachers’ pedagogical and epistemological considerations into Toulmin’s model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173.

O’ Connor, M. C. (1998). Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking. In M. Lampert & M. Blunk (Eds.), *Talking mathematics: Studies of teaching and learning in school* (pp. 17–55). NY: Cambridge University Press.

Papadaki, E. (2019). Mapping out different discourses of mathematical horizon. In F. Curtis, (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *39*(1), 1-6. Available at https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2019/07/BSRLM-CP-39-1-07.pdf.

Papadopoulos, I. (2019). Using mobile puzzles to exhibit certain algebraic habits of mind and demonstrate symbol-sense in primary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 210-227.

Paris, D., & Alim, S. (2014). What are we seeking to sustain through culturally sustaining pedagogy? A loving critique forward. *Harvard Educational Review*, *84*(1), 85–100.

Πετροπούλου, Γ., Μάλη, Α., & Μπιζά, Ε. (2019). Οι ερευνητές μαθηματικοί στη διδακτική πράξη: Δυνατότητες και προοπτικές για την εκπαίδευση των μελλοντικών εκπαιδευτικών. Στα *Πρακτικά του 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. XXX-XXX). Λάρνακα, Κύπρος: ΕΝΕΔΙΜ

Potari, D., & Psycharis, G. (2018). Prospective Mathematics Teacher Argumentation While Interpreting Classroom Incidents. In M. E. Strutchens, R. Huang, D. Potari, & L. Losano (Eds.), *Educating Prospective Secondary Mathematics Teachers* (pp. 169-187). ICME-13 Monographs: Springer.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(4), 351-380.

Powell A. B., Borge I. C., Fioriti G. I., Kondratieva M., Koublanova E., & Sukthankar N. (2009). Challenging Tasks and Mathematics Learning. In E. J. Barbeau, P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics in and beyond the classroom*. New ICMI Study Series, 12, Springer NY, 133-170.

Slezáková, J., Hejný, M., & Kloboučková, J. (2012). Entrance to negative number via two didactical environments. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 93*, 990-994.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development.* New York: Teachers College Press, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York: Springer.

Sullivan, P., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D., Mornane, A., Roche, A., & Walker, N. (2015). Supporting teachers in structuring mathematics lessons involving challenging tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*, 123-140.

Thoma, G., & Biza, I. (in press). Problem-solving techniques in the context of an educational video game: The mudwall puzzle in Zoombinis. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Vithal, R. (2012). Mathematics education, democracy and development: Exploring connections. *Pythagoras*, *33*(2), 1–14. doi:10.4102/ pythagoras.v33i2.200

Wallin, A. J., & Amador, J. M. (2019). Supporting secondary rural teachers' development of noticing and pedagogical design capacity through video clubs. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(5), 515-540.

Winsløw, C. (2014). Klein's double discontinuity revisited: Contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(1), 59-86.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 458–477.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(4), 263-281.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8-13.

Zoitsakos, S., Zachariades, T, & Sakonidis, C. (2018). The role of horizon content knowledge in teachers' recognition and interpretation of students' mathematical misconceptions. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 4, pp. 475-482). Umeå, Sweden: PME.