Ergodentheorie: von Planetenbahnen zur Zahlentheorie. Die Theorie der Dynamischen Systeme bildet heute einen wichtigen Zweig der Mathematik, welche in seiner modernen Form auf Poincaré, einen Mathematiker des 19. Jahrhunderts, zurückgeht. Die Untersuchung von einigen, den dynamischen Systemen grundlegenden Phänomenen ist jedoch viel älter. Bereits im 14. Jh. spekulierte der französische Kleriker Nicole d'Oresme darüber, ob die Perioden (Umlaufzeiten) verschiedener Planeten nicht kommensurabel sein müssen, d.h. in unserer heutigen Bezeichnungsweise, ob ihre Verhältnisse durch rationale Zahlen ausgedrückt werden können. Sein Argument beruhte auf einer interessanten Analogiebetrachtung: Wenn schon der Uhrmacher offensichtlich den Wunsch hat, dass alle Zahnräder so harmonisch wie möglich ineinandergreifen, sollte dann nicht auch der Herr der Schöpfung analog die Planeten mit kommensurablen Perioden um sich haben drehen lassen? Dieses Argument wirkt heute wenig überzeugend, die Frage bleibt aber aktuell.

Die Theorie der Dynamischen Systeme ist von großer Bedeutung für viele andere Gebiete der Mathematik. Im Mittelpunkt aller Untersuchungen steht die Idee, dass die zeitliche Entwicklung von Systemen, die einfachen Gesetzen folgen, zwar im Allgemeinen höchst komplex und aperiodisch sein wird, aber zur gleichen Zeit in einem globalen oder asymptotischen Sinne auch regulär und eingeschränkt. In den folgenden Ausführungen betrachten wir allgemein einen Raum (in Oresmes Beispiel wäre das der Raum aller Parameter, welche die möglichen Konfigurationen und Geschwindigkeiten der Planeten zu einem festen Zeitpunkt beschreiben), und eine dynamische *Wirkung* auf diesem Raum (bei Oresme wäre dies die zeitliche Entwicklung der Konfigurationen und der Geschwindigkeiten der Planeten). Weiterhin ist auf dem Raum auch noch ein *Maß* gegeben, welches es gestattet, Aussagen über die "Größe" einer Menge zu machen. Dieses Maß soll unter der dynamischen Wirkung unverändert bleiben, und wird benötigt, um das statistische Verhalten des Systems für große Zeiten beschreiben zu können: man ist z.B. an der Frage interessiert, welche Zeit ein Planet in einem vorgegebenen Gebiet des Raumes mit einer Geschwindigkeit innerhalb eines vorgegebenen Geschwindigkeitsintervalls verbringt. Eine wesentliche Beobachtung im Zusammenhang mit Oresmes Frage zu den Planetenbahnen ist, dass inkommensurable Bahnen und Drehungen um irrationale Winkel typischerweise mit Dynamiken zusammenhängen, in denen nur ein einziges invariantes Maß existiert. Die Eindeutigkeit von invarianten Maßen ist eine starke statistische Eigenschaft, die das dynamische Verhalten in allen Punkten des Raumes sehr eng miteinander korreliert.

In der modernen Theorie arbeitet man mit einer abstrakten Menge X, dem sogenannten *Phasenraum*, dessen Punkte in unserem Beispiel alle möglichen augenblicklichen Standorte und Geschwindigkeiten der Planeten beschreiben. Die Mannigfaltigkeit aller Zeiten t möge durch die reellen Zahlen dargestellt werden — die Zahl $t = 0$ beschreibt dann "jetzt", $t = 1$ ist eine Zeiteinheit, z.B. eine Sekunde später, $t = -1$ ist eine Sekunde früher, usw. Die Zeit wirkt auf dem Raum X in folgender Weise: zu jedem Zeitpunkt t gibt es eine Transformation $T_t : X \to X$ des Phasenraums in sich, die jeden Punkt x in den eindeutig bestimmten Punkt $T_t(x)$ überführt, der Ort und Geschwindigkeit der Planeten zur Zeit t bestimmt, wenn sich diese zur Zeit $t = 0$ im Punkt x befanden. Da wir annehmen, dass die physikalischen Gesetze der Planetenbahnen sich nicht mit der Zeit ändern, wird für einen vorgegebenen Ausgangspunkt x der Punkt im Phasenraum nach $s+t$ Zeiteinheiten genau derselbe sein wie derjenige, der die Lage und die Geschwindigkeit der Planeten s Zeiteinheiten nach dem nach t Zeiteinheiten erreichten Punkt beschreibt: d.h. es gilt die Gleichung

$$T_s(T_t(x)) = T_{s+t}(x)\,. \tag{1}$$

Noch allgemeiner betrachtet man ein dynamisches System bestehend aus einem Raum X zusammen mit einer Menge G, deren Elemente sinnvoll miteinander verknüpft werden können (eine so genannte *Gruppe*), die auf dem Raum eine Wirkung T definieren: jedem Element g von G ist eine Transformation $T_g : X \to X$ zugeordnet, die in Analogie mit (1) die Gleichung

$$T_g(T_h(x)) = T_{gh}(x) \text{ für alle } g, h \in G \text{ und } x \in X$$

erfüllt. Dies erlaubt es, die zeitliche Entwicklung eines Systems durch die Wirkung einer allgemeinen Gruppe, die etwa räumliche Symmetrien des Systems beschreibt, zu ersetzen. Die Annahme, dass physikalische Gesetze, die das System beschreiben, sich mit der *Zeit* nicht ändern, wird dann verallgemeinert zur Annahme, dass physikalische Gesetze sich unter der *Wirkung von G* nicht ändern.

Die moderne Forschung auf dem Gebiet der dynamischen Systeme hat sich in viele verschiedene Richtungen entwickelt, wobei das Verhalten verschiedener Strukturen des Phasenraums X unter der Wirkung von Gruppen G unter diversen Gesichtspunkten betrachtet wird. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf neuere Anwendungen der Ergodentheorie auf ein bekanntes zahlentheoretisches Problem, über welche am MPI für Mathematik während des speziellen Semesters über dynamische Systeme im Jahr 2004 berichtet und gearbeitet wurde. Dieses Problem, das direkt mit Oresmes Frage über die Kommensurabilität von Umlaufzeiten zusammenhängt, betrifft die sogenannte *Diophantische Approximation* und liegt in einer Tradition von Dialog zwischen Zahlentheorie und der Theorie der dynamischen Systeme, die sich für beide Gebiete als sehr fruchtbar erwiesen hat.

Die Diophantische Approximation beschäftigt sich u.a. auch mit der folgenden Frage: Wie klein kann für eine vorgegebene reelle Zahl u die Größe

$$\left| u - \frac{p}{q} \right| \tag{2}$$

sein, wenn p und q ganze Zahlen sind, oder anders ausgedrückt, wie gut kann eine reelle Zahl durch eine rationale Zahl approximiert werden? Falls u selbst eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ist, kann der Ausdruck (2) gleich null werden, und die obige Frage ist vollständig beantwortet. Falls u eine irrationale Zahl ist, wie z.B. $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$, ist die Frage offensichtlich sehr viel interessanter, weil dann (2) niemals verschwindet.

Eine naive Antwort auf die obige Frage in diesem Fall ist dann "beliebig klein". Falls nämlich die Dezimalentwicklung der Zahl u die Form $u_0.u_1u_2\ldots$ mit einem ganzzahligen u_0 besitzt, dann gilt offensichtlich

$$\left| u - \frac{u_0u_1\cdots u_k}{10^k} \right| \;\leq\; 0.\underbrace{0\cdots0}_{k}999\cdots = \frac{1}{10^k}\,.$$

Zum Beispiel findet man

$$\left| \sqrt{2} - \frac{14142135}{10000000} \right| \;<\; \frac{1}{10000000}\,. \tag{3}$$

Also können wir den Ausdruck (2) in der Tat beliebig klein machen, wenn nur k hinreichend groß gewählt wird.

Um eine noch interessantere Antwort zu erhalten, muß die Frage weiter präzisiert werden: Wie klein kann der Ausdruck (2) *relativ zur Größe des Nenners q* gemacht werden? Ihn etwa so klein wie $\frac{1}{q}$ wie in (3) zu machen, ist einfach—aber kann man dieses Resultat noch verbessern? Es stellt sich nun heraus, dass man immer eine Folge $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ finden kann, mit $q_n \to \infty$ für $n \to \infty$, für welche

$$\left| u - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \text{ für alle } n \tag{4}$$

gilt. Eine Möglichkeit, solche guten Approximationen zu finden, macht von der Kettenbruchentwicklung von u Gebrauch. Für die Zahl $\sqrt{2}$ führt diese Methode auf die Folge der rationalen Zahlen $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$. Man prüft leicht nach, dass jede dieser Zahlen der Ungleichung (4) genügt.

Schreiben wir $\langle x \rangle$ für den Abstand einer Zahl x zur nächsten ganzen Zahl, so kann der Ausdruck (4) auch wie folgt geschrieben werden: es gibt eine Folge $q_n \to \infty$ von ganzen Zahlen mit der Eigenschaft, dass

$$q_n \langle q_n u \rangle < 1 \text{ für alle } n\,. \tag{5}$$

Um 1930 formulierte Littlewood eine Vermutung zur *gleichzeitigen* rationalen Approximation von zwei beliebigen reellen Zahlen u und v: es soll immer eine Folge $q_1, q_2, \ldots$ geben mit

$$q_n \langle q_n u \rangle \langle q_n v \rangle \longrightarrow 0 \text{ wenn } n \to \infty\,. \tag{6}$$

Für Zahlen u und v mit ganz speziellen Beziehungen zueinander konnte (6) gezeigt werden, aber ein Beweis der allgemeinen Vermutung für beliebige Zahlen u und v scheint zur Zeit außer Reichweite.

Um das Littlewoodsche Problem mit Ergodentheorie und der Theorie der dynamischen Systeme zu verknüpften, nimmt man als Phasenraum den Raum X_3 der *unimodularen Gitter* im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. (Der entsprechende Raum für zweidimensionale Gitter ist die Grundlage der Theorie der Modulformen, auch ein sehr aktives Forschungsgebiet am MPIM.) Ein solches Gitter wird von drei Vektoren v_1,v_2, v_3 aufgespannt, die zusammen eine 3×3 Matrix $M = (v_1\, v_2\, v_3)$ der Determinante 1 bilden, also ein Element der Gruppe, die man mit $SL_3(\mathbb{R})$ bezeichnet. Eine andere Wahl der aufspannenden Vektoren ersetzt M durch $M\gamma$, wobei γ eine 3×3 Matrix mit Determinante 1 und ganzzahligen Koeffizienten, also ein Element von $SL_3(\mathbb{Z})$ ist. Man kann also den Phasenraum X_3 mit dem Quotientenraum $SL_3(\mathbb{R})/SL_3(\mathbb{Z})$ identifizieren. Als Gruppe G nimmt man die Gruppe der Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

mit a, b, c positiv und $abc = 1$, die durch Linksmultiplikation auf X_3 operiert. Dann gilt die Littlewoodsche Vermutung für u und v dann und nur dann, wenn die Bahn des Punktes

$$t(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ v & 0 & 1 \end{pmatrix} SL_3(\mathbb{Z}) \tag{7}$$

in X_3 unter der Wirkung von G unbeschränkt ist (also ab und zu nach Unendlich wegwandert). In der Tat entspricht $t(u, v)$ dem Gitter aller Vektoren der Gestalt $(q, qu - r, qv - s)$ mit q, r und s ganz, wodurch man die Verbindung zwischen der Bahnkurve des Punktes $t(u, v)$ unter der Wirkung von G und dem diophantischen Problem (6) sieht.

Einsiedler, Katok und Lindenstrauss konnten einen wichtigen Teilerfolg bezüglich der Littlewoodschen Vermutung erzielen, indem sie eine bestimmte Starrheitseigenschaft von G-invarianten ergodischen Maßen auf X_3 mit positiver Entropie zeigten und diese benutzten, um die Gültigkeit der Vermutung (6) für alle Paare reeller Zahlen u und v bis auf eine sehr kleine Ausnahmemenge zu beweisen. Dieser dramatische Fortschritt ist ein gutes Beispiel für den erfolgreichen Einsatz von Methoden aus Ergodentheorie und Geometrie in der Zahlentheorie. Diese Wechselwirkung, sowie die Verknüpfungen mit Wahrscheinlichkeitsrechnung, Analysis, mathematischer Physik und anderen Gebieten, stand im Mittelpunkt der Aktivität in algebraischer und topologischer Dynamik am MPI für Mathematik im Jahr 2004, an der ungefähr 90 Mathematiker aus 20 Ländern teilnahmen. Über die neuen Erkenntnisse und neuen Kooperationen, die hieraus entstanden sind, wird im Rahmen eines Proceedingsbandes und in entsprechenden Veröffentlichungen berichtet werden. (*T. Ward*)